

N° D'ORDRE :

1368.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR M. ANDRÉ LÉAUTÉ,

Ancien Ingénieur au corps des Mines.

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LA DÉCHARGE DES CONDENSATEURS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *18 mars* ~~avril~~ 1910, devant la Commission d'examen.

MM. G. LIPPMANN, *Président.*

E. BOUTY,

A. HALLER,

P. PAINLEVÉ,

Examineurs.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS.

Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

N° D'ORDRE :

1568.

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES,

PAR M. ANDRÉ LÉAUTÉ,

Ancien Ingénieur au corps des Mines.

1^{re} THÈSE. — RECHERCHES SUR LA DÉCHARGE DES CONDENSATEURS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le *18 mars* ~~avril~~ 1910, devant la Commission d'examen.



MM. G. LIPPMANN, *Président.*

E. BOUTY,

A. HALLER,

P. PAINLEVÉ,

} *Examineurs.*

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'OBSERVATOIRE DE PARIS,

Quai des Grands-Augustins, 55.

1910

UNIVERSITÉ DE PARIS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE PARIS.

MM.		
Doyen.....	P. APPELL, professeur.	Mécanique rationnelle.
Doyen honoraire.....	G. DARBOUX.....	Géométrie supérieure.
Professeurs honoraires ..	L. TROOST.	
	Cn. WOLF.	
	RIBAN.	
	LIPPMANN.....	Physique.
Professeurs.....	BOUTY.....	Physique.
	BOUSSINESQ.....	Physique mathématique et Calcul des probabilités.
	PICARD.....	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.
	H. POINCARÉ.....	Astronomie mathématique et Mécanique céleste.
	YVES DELAGE.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
	G. BONNIER.....	Botanique.
	DASTRE.....	Physiologie.
	KOENIGS.....	Mécanique physique et expérimentale.
	VELAIN.....	Géographie physique.
	GOURSAT.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	CHATIN.....	Histologie.
	HALLER.....	Chimie organique.
	JOANNIS.....	Chimie (Enseignement P. C. N.).
	P. JANET.....	Physique (Enseignement P. C. N.).
	WALLERANT.....	Minéralogie.
	ANDOYER.....	Astronomie physique.
	PAINLEVÉ.....	Mathématiques générales.
	HAUG.....	Géologie.
	TANNERY.....	Calcul différentiel et Calcul intégral.
	RAFFY.....	Application de l'Analyse à la Géométrie.
	HOUSSAY.....	Zoologie.
	H. LE CHATELIER....	Chimie.
	GABRIEL BERTRAND...	Chimie biologique.
	M ^{me} P. CURIE.....	Physique générale.
	CAULLERY.....	Zoologie (évolution des êtres organisés).
	C. CHABRIÉ.....	Chimie appliquée.
	G. URBAIN.....	Chimie.
	BOREL.....	Théorie des fonctions.
	MARCHIS.....	Aviation.
	N.....	Physique.
	N.....	Zoologie, Anatomie, Physiologie compar.
Professeurs adjoints.....	PUISEUX.....	Mécanique et Astronomie.
	LEDUC.....	Physique.
	MATRUCHOT.....	Botanique.
	MICHEL.....	Minéralogie.
	PRUVOT.....	Anatomie comparée.
	HEROUARD.....	Zoologie.
	LÉON BERTRAND.....	Géologie.
	RÉMY PERRIER.....	Zoologie (Enseignement P. C. N.).
	JEAN PERRIN.....	Chimie physique.
	MOLLIARD.....	Physiologie végétale.
Secrétaire.....	COTTON.....	Physique.
	A. GUILLET.	

A

MONSIEUR G. LIPPMANN.

MEMBRE DE L'INSTITUT.

Hommage respectueux.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41556009_0044

A

MONSIEUR G.-A. HEMSALECH,

MASTER OF SCIENCE (MANCHESTER).

En remerciement de ses bienveillants conseils.

PREMIÈRE THÈSE.

RECHERCHES

SUR

LA DÉCHARGE DES CONDENSATEURS.

CHAPITRE I.

HISTORIQUE.

Depuis l'année 1746, où deux savants hollandais ⁽¹⁾ découvrirent les propriétés de la bouteille de Leyde, la décharge des condensateurs a donné lieu à un nombre considérable de recherches. Tour à tour, Franklin, Cavendish ⁽²⁾ et Faraday ⁽³⁾ s'y appliquèrent; Riess ⁽⁴⁾ y consacra l'un de ses plus célèbres travaux; le D^r Joseph Henry ⁽⁵⁾ y trouva le sujet d'un Mémoire plein d'originalité et de hardiesse. Mais c'est surtout avec Helmholtz ⁽⁶⁾ qu'apparurent des idées plus précises : « On doit, dit-il, supposer que la décharge d'une batterie n'est pas un simple mouvement d'électricité dans une direction, mais une

⁽¹⁾ Cuneus et Muschenbroek.

⁽²⁾ CAVENDISH, *Influence de la nature de l'isolant*, 1771.

⁽³⁾ FARADAY, *Experimental Researches*.

⁽⁴⁾ RIESS, *Ann. de Phys. et de Chim.*, 2^e série, t. LXIX, 1838, p. 113.

⁽⁵⁾ J. HENRY, *Scientific Writings*, p. 201. Washington, 1842.

⁽⁶⁾ HELMHOLTZ, *Erhaltung der Kraft*, 1847.

allée et venue entre les armatures ». On ne peut exprimer de façon plus nette l'idée générale que nous nous faisons aujourd'hui de la décharge oscillante; toutefois, il était réservé à W. Thomson et à Kirchhoff d'établir sur une base mathématique la légitimité de cette théorie.

Ces deux illustres savants ⁽¹⁾ parvinrent simultanément à ce résultat, mais en suivant, pour l'obtenir, des voies différentes. Thomson supposa nulle la capacité du circuit et, grâce à cette hypothèse, put donner à sa théorie une forme d'une extrême simplicité; Kirchhoff, au contraire, se préoccupa de rechercher quelle influence pouvait avoir sur la décharge la capacité du fil qui réunit les armatures. Les phénomènes que nous étudions ici étant dus précisément à la capacité du circuit, il est intéressant d'examiner avec quelque soin le travail de Kirchhoff.

Les trois hypothèses que pose le grand physicien allemand sont les suivantes :

- 1° La section du fil est infiniment petite par rapport à sa longueur;
- 2° Deux points quelconques du circuit, séparés par une longueur finie de fil, ne peuvent être à une distance infiniment petite l'un de l'autre;
- 3° La loi d'Ohm est applicable.

Ces hypothèses une fois admises, la méthode consiste à écrire que la force électromotrice s'exerçant sur un élément de fil de longueur dx est égale au produit de la résistance ohmique de cet élément par l'intensité du courant qui le traverse. Cette force électromotrice a, d'ailleurs, une double origine : elle provient, d'une part, des masses d'électricité répandues sur le conducteur au voisinage de l'élément et, d'autre part, de l'induction qu'exerce sur cet élément le courant qui circule dans le fil. Après qu'une double intégration a fait connaître l'expression de la force électromotrice, la loi d'Ohm fournit la première

⁽¹⁾ W. THOMSON, *On transient electric currents* (*Phil. Mag.*, 4^e série, t. V, p. 393). — KIRCHHOFF, *Pogg. Ann.*, t. C, p. 193 et 351; t. CII, p. 529.

équation du problème, qui est une équation aux dérivées partielles entre l'intensité i et le potentiel v en un point quelconque du fil; la seconde équation s'obtient par des considérations analogues à celles qu'imagina Fourier dans sa théorie de la chaleur.

La résolution de ces équations montre que le courant de décharge, en un point quelconque du circuit, est formé par la superposition d'une infinité de courants oscillatoires élémentaires, dont chacun a une intensité de la forme

$$i = A \cos mt e^{-ht} \cos(nx + \xi),$$

les coefficients m et h variant suivant le terme qu'on envisage. Pour achever de déterminer la solution, il suffit d'écrire les conditions aux limites, qui font connaître la période des oscillations élémentaires; on désigne par *fondamentale* l'oscillation dont la fréquence est la plus petite, et l'on attribue aux autres termes de la série le nom d'*harmoniques*.

Ce travail de Kirchhoff, paru en même temps que le Mémoire de Thomson, en différait non seulement par la méthode suivie, mais encore par les conclusions, car il faisait prévoir des harmoniques dont l'existence était en contradiction avec la théorie de Thomson. Aussi, pendant un demi-siècle, s'appliqua-t-on de toutes parts à vérifier cette conséquence du calcul de Kirchhoff et à en discuter l'exactitude.

La propagation des ondes électriques le long de fils droits, ayant une capacité l'un par rapport à l'autre, a ainsi donné lieu à de nombreuses recherches expérimentales et théoriques. Les mesures de MM. Lecher, Rubens et Lamotte ⁽¹⁾ ont permis de vérifier l'existence d'ondes multiples; d'autre part, MM. Cohn et Heerwagen ⁽²⁾ ont cherché, en s'appuyant sur la théorie de Maxwell, à retrouver et à compléter les résultats de Kirchhoff.

⁽¹⁾ LECHER, *Wied. Ann.*, t. XLI, 1890, p. 850. — RUBENS, *Wied. Ann.*, t. XLII, 1894, p. 154. — LAMOTTE, *Thèse*, 1901. — Cf. aussi VON GEITLER, 1898.

⁽²⁾ COHN et HEERWAGEN, *Wied. Ann.*, t. XLIII, 1891, p. 343.

Tout d'abord MM. Cohn et Heerwagen ont étudié quelle était la distribution du champ électromagnétique dans l'espace environnant les deux fils. Ils ont admis que le rayon de ces conducteurs est assez petit pour que le champ puisse être considéré comme dû à la superposition des champs partiels, que chaque fil produirait s'il était seul. Les formules de Hertz ⁽¹⁾ permettent de déterminer en chaque point l'intensité des champs magnétique et électrique, et l'on en déduit par le théorème de Poynting l'énergie électromagnétique qui traverse un plan perpendiculaire aux fils.

D'autre part, on suppose que les deux fils, le long desquels les ondes se propagent, aboutissent aux armatures d'un petit condensateur circulaire; si l'on admet que les lignes de force sont perpendiculaires aux plateaux, on peut, en faisant usage de la fonction de Bessel, déterminer quel est le champ entre les armatures du condensateur et quelle est l'énergie qui y est contenue.

Imaginons donc qu'on ait placé un pont conducteur entre les deux fils à un nœud d'intensité; puis écrivons que l'énergie totale du système compris entre le pont et le condensateur terminal est constante, en supposant que le champ dû aux fils et celui qui est dû au condensateur ne s'influencent pas. L'équation, à laquelle on parvient ainsi, est

$$\operatorname{tang}\left(\frac{2\pi z}{\lambda}\right) = \lambda \frac{1}{8\pi c \log\left(\frac{b}{a}\right)},$$

dans laquelle on désigne par :

z , la distance au condensateur du premier nœud de l'oscillation considérée;

λ , la longueur d'onde de cette oscillation;

c , la capacité (en centimètres) du conducteur;

b , l'écartement des fils parallèles;

a , le rayon de leur section droite.

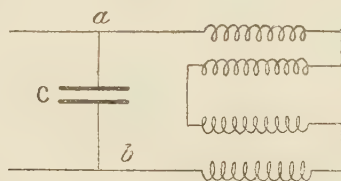
⁽¹⁾ HERTZ, *Wied. Ann.*, t. XXXI, 1887, p. 444; t. XXXIV, 1888, p. 559.

Cette équation présente une certaine analogie de forme avec celle que nous avons obtenue en supposant le circuit formé par une bobine de self-induction. Mais, dans ce dernier cas, les phénomènes se compliquent; la méthode de Cohn et Heerwagen n'est plus applicable, et c'est pour cela que la propagation d'ondes électriques le long d'un conducteur de forme solénoïdale n'avait pas été abordée jusqu'ici.

Sans doute, on savait depuis longtemps ⁽¹⁾ que les bobines de résistance se prêtent mal aux mesures, lorsqu'on emploie dans le pont de Wheatstone des courants alternatifs; Kohlrausch ⁽²⁾ d'abord, Brylinski ⁽³⁾ ensuite avaient attribué cet effet à la capacité électrostatique de la bobine; cette manière de voir avait été confirmée par Chaperon ⁽⁴⁾, qui avait tenté de mesurer cette capacité, puis par Coreau. On ne doutait évidemment pas que les bobines de self-induction ne dussent à ce point de vue se comporter comme les bobines de résistance, et c'était d'ailleurs là une idée qui remontait fort loin et qu'on trouve déjà dans Helmholtz ⁽⁵⁾.

En 1874, Schiller ⁽⁶⁾ avait même essayé de tenir compte de cette

Fig. 1.



capacité en imaginant un condensateur fictif C, monté aux bornes *a*, *b* d'une bobine de self-induction; ce n'était, on le conçoit, qu'une

⁽¹⁾ BOUTY et FOUSSEREAU, *Journal de Physique*, t. IV, 1885. — KOHLRAUSCH, *Annalen*, 1885. — SCHELDON, *Ibid.*, 1885.

⁽²⁾ KOHLRAUSCH, *Ibid.*, 1885.

⁽³⁾ BRYLINSKI, *Annales télégraphiques*, 1888.

⁽⁴⁾ CHAPERON, *Comptes rendus*, t. CVIII, 1889, p. 799.

⁽⁵⁾ HELMHOLTZ, *Erhaltung der Kraft*, Berlin, 1847.

⁽⁶⁾ SCHILLER, *Pogg. Annalen*, 1874, p. 535.

approximation fort grossière, mais à ce moment on ne s'était guère préoccupé de la préciser.

Quinze ans plus tard seulement, M. Heydweiller ⁽¹⁾ d'abord, puis MM. Lüdin ⁽²⁾ et Hemsalech ⁽³⁾ revinrent sur cette question de la capacité des bobines de self-induction; mais aucun d'eux ne tenta de découvrir quel était le mécanisme exact de la décharge d'un condensateur à travers une bobine portant plusieurs couches.

M. Hemsalech en particulier, dont les travaux font autorité sur cette question, se consacra à l'étude purement expérimentale du phénomène. Il eut l'idée, pour étudier la décharge d'un condensateur, d'observer l'étincelle à une coupure du circuit. Il fit subir dans ce but à la méthode de Feddersen une modification consistant à supprimer le miroir tournant et à imprimer à la plaque photographique elle-même un mouvement rapide; cette méthode, dont il semble qu'il faille faire remonter l'idée première à Schmidt, est devenue entre les mains de M. Hemsalech un procédé d'observation des plus précis.

Le mouvement de la plaque photographique ou de la pellicule sensible peut être réalisé de deux façons différentes ⁽⁴⁾. Dans une première série d'expériences, deux disques O et O' sont montés sur le même axe (*fig. 2*); le disque O', dont le rayon est un peu inférieur à celui de O, est appliqué contre ce dernier; mais il laisse, sans la recouvrir, sur la face de O en contact avec lui, une étroite bande annulaire MN, dont l'épaisseur est égale à la différence des rayons des deux disques. La pellicule, qui est circulaire, est serrée entre O et O'; la partie utile est celle qui recouvre la bande annulaire MN. L'image de l'étincelle se fait sur cette bande, et les deux disques reçoivent un mouvement de rotation rapide autour de leur axe, de façon que toutes

⁽¹⁾ HEYDWEILLER, *Wied. Annalen*, 2^e série, t. XXXVIII, 1889, p. 534.

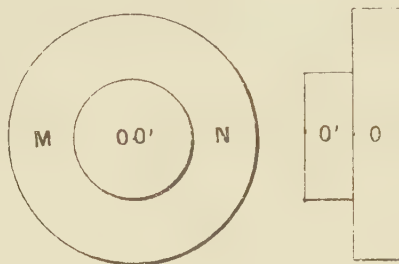
⁽²⁾ LÜDIN, *Wied. Annalen*, 4^e série, t. VII, 1902, p. 584.

⁽³⁾ HEMSALECH, *Conférence*.

⁽⁴⁾ HEMSALECH, *Comptes rendus*, 8 avril 1907. — Cf. aussi SHUSTER et HEMSALECH, *Philos. Trans.*, t. CXCI, 1899, p. 189.

les parties de la pellicule soient frappées successivement par les rayons lumineux.

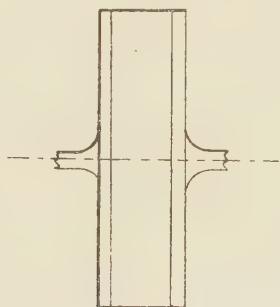
Fig. 2.



Une autre façon de procéder consiste à faire usage d'une poulie, sur la jante de laquelle est fixée une pellicule rectangulaire, telle que celles qu'on emploie dans les appareils Kodak. Deux pointes, brasées sur la poulie et sur lesquelles on pique les deux extrémités de la pellicule, maintiennent cette pellicule en place.

Dans les deux dispositifs, et malgré que, dans le second, l'on ait essayé de fixer plus solidement la pellicule en l'attachant sur la jante

Fig. 3.



avec des fils fins métalliques, on ne peut dépasser la vitesse de 3000 tours par minute, sans que la force centrifuge devienne suffisante pour arracher la pellicule.

Le point essentiel des combinaisons expérimentales imaginées par M. Hemsalech réside dans l'interposition d'une fente très fine de colli-mateur entre l'étincelle et l'objectif photographique. C'est grâce à cette

disposition que les clichés obtenus ont été d'une si remarquable netteté.

Ces photographies ont permis à M. Hemsalech de faire en quelque sorte l'analyse de l'étincelle. Elles lui ont révélé que le phénomène de la décharge disruptive comportait deux phases bien distinctes : la première, à laquelle il a donné le nom de *trait lumineux*, est une manifestation électrique tellement rapide qu'on n'a pu encore en déterminer la durée; elle se traduit sur le cliché par l'apparition d'une ligne très fine, qu'on ne parvient ni à dévier ni à épaissir, quelle que soit la vitesse imprimée à la pellicule. La seconde est celle qui seule était apparue à Feddersen; elle est caractérisée par un afflux abondant, sur le trajet de l'étincelle, de vapeurs métalliques provenant des électrodes. Lorsque la résistance du circuit de décharge est assez petite, c'est cette seconde phase qui prend la forme oscillatoire.

M. Hemsalech a enfin complété cette étude en recherchant quelle influence la self-induction du circuit, la capacité du condensateur et divers autres facteurs exerçaient, d'une part, sur le trait lumineux, d'autre part, sur les oscillations.

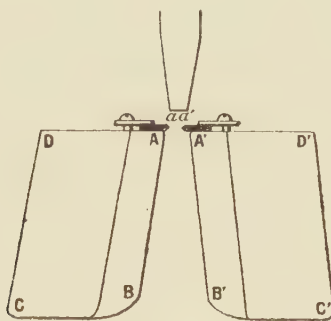
La méthode précédente, s'il est vrai qu'elle doive être préférée à toutes les autres lorsqu'il s'agit de mesures précises à effectuer, a le grave inconvénient de ne pas rendre sensibles à l'œil les phénomènes qu'on étudie. Pour combler cette lacune, M. Hemsalech a repris un procédé mis jadis en œuvre par Lehmann, Klingelfuss et Zehnder ⁽¹⁾ et qui consiste à souffler l'étincelle par un courant d'air. Du Moncel ⁽²⁾ avait effectué autrefois quelques expériences analogues, mais ni lui ni aucun des trois physiciens allemands qui ont employé le soufflage n'était parvenu à rendre le phénomène assez fixe pour pouvoir tirer de ces expériences quelque conclusion nette; M. Hemsalech, au contraire, y a parfaitement réussi.

⁽¹⁾ LEHMANN, *Die elektrischen Lichterscheinungen*, p. 240. — KLINGELFUSS, *Drude's Annalen*, t. V, 1900, p. 837. — ZEHNDER, *Ibid.*, t. IX, 1902, p. 899.

⁽²⁾ DU MONCEL, *Notice sur l'appareil de Ruhmkorff*, 1^{re} édition, p. 27.

Dans l'appareil dont il s'est servi ⁽¹⁾, les électrodes sont constituées par deux plaques de cuivre, ABCD et A'B'C'D', fixées sur un bâti isolant, de telle sorte que leurs bords AB et A'B', qui sont d'ailleurs

Fig. 4.



taillés en biseau, fassent entre eux un angle de quelques degrés. En A et A' sont fixés deux fils de platine, ayant leurs extrémités a et a' distantes de 3^{mm} environ l'une de l'autre dans le plan médian des électrodes; c'est entre a et a' que l'étincelle s'amorce. Le tube de soufflage a son orifice placé à quelques centimètres des électrodes et son axe est perpendiculaire à aa' .

Dès que le potentiel disruptif est atteint, les molécules d'air sont ionisées sur la ligne aa' ; mais, comme elles sont en même temps entraînées par le courant d'air, elles forment une sorte de chaînette qui se déplace de AA' vers BB' et qui, si la décharge est oscillante, sépare les oscillations en ouvrant à chacune d'elles une voie différente d'une électrode à l'autre.

Ce procédé a permis à M. Hemsalech de retrouver les résultats que la méthode photographique lui avait fournis. Ce sont les pointes, a , a' , qui, en fixant l'étincelle à une hauteur invariable, permettent dans ces expériences d'obtenir toute la netteté désirable.

Les stries. — Les deux méthodes utilisées par M. Hemsalech, et

(¹) HEMSALECH, *Comptes rendus*, t. CXL, 1905, p. 1103.

qu'on peut appeler *méthode photographique* et *méthode du courant d'air*, ont permis à ce physicien de montrer que chacune des parties lumineuses qui correspondent aux différentes oscillations de l'étincelle renferme un certain nombre de stries; il a donné à celles-ci le nom d'*harmoniques*. En 1860, Feddersen avait fait une remarque analogue et, sur les photographies qu'il obtenait au miroir tournant, il avait vu des stries, dont il rapportait la cause à des oscillations d'ordre supérieur.

M. Hemsalech, allant plus loin, a tiré des conclusions intéressantes de l'observation des stries. Ces stries, en effet, qui sont peut-être identiques à celles de Feddersen, présentent leur maximum de netteté dans les premières oscillations; or, ces premières oscillations sont les plus riches en vapeur métallique. « Il est donc manifeste, dit M. Hemsalech, que les harmoniques sont sinon uniquement, du moins en grande partie la cause de la luminosité de la vapeur métallique dans l'étincelle. En outre, la séparation des harmoniques en stries prouve que la vapeur reste lumineuse seulement pendant le passage du courant. » M. Hemsalech a pu mesurer à l'aide du microscope l'écartement des stries, qu'il a trouvées sensiblement équidistantes.

Sur cette même question, MM. Batelli et Magri ⁽¹⁾ sont parvenus à des conclusions contraires. Ils ont tout d'abord contesté que les stries observées par M. Hemsalech fussent la cause de la luminosité de la vapeur métallique dans l'étincelle : « Il faudrait, ont-ils dit, pour qu'il en soit ainsi, que cette vapeur ne reste lumineuse que pendant le passage du courant; au contraire, certaines raies métalliques, qu'on peut observer dans le spectre de l'étincelle, subsistent lorsque le courant s'annule. » De plus, MM. Batelli et Magri ont contesté que les stries fussent équidistantes et ils les ont attribuées à des expulsions irrégulières de vapeurs métalliques provenant des électrodes. L'irrégularité

(1) BATELLI et MAGRI, *Atti della R. Accademia dei Lincei*, 5^e série, t. XVI, n° 1, 1907, p. 12.

de ces expulsions serait plus grande dans les premières oscillations que dans les suivantes, parce qu'au début de la décharge les maxima d'intensité du courant sont plus élevés et les électrodes plus froides.

Pour répondre à ces objections, M. Hemsalech ⁽¹⁾ a institué diverses expériences, qui ont apporté une confirmation nouvelle à ses premiers résultats. Il a tout d'abord repris, par la méthode photographique et à l'aide d'une machine à diviser très précise, la mesure de l'écartement des stries; de nouveau, il a constaté que ces stries étaient très sensiblement équidistantes. D'autre part, l'emploi de la méthode du courant d'air lui a fourni un nouvel argument pour répondre aux critiques que ses premières recherches avaient soulevées. « Avec un courant d'air faible, les oscillations fondamentales se séparent les unes des autres et donnent lieu à une série de petits arcs lumineux; si l'on augmente la vitesse du courant d'air, on voit chacune de ces oscillations se décomposer et les harmoniques apparaître. Or, dans cette méthode, la vapeur métallique n'intervient pas, étant chassée par le soufflage ».

Enfin, dans une dernière série d'expériences, M. Hemsalech a constaté que la bobine de self-induction intercalée dans le circuit de décharge jouait un rôle capital dans la production des phénomènes. Il a vu les stries apparaître lorsqu'il se servait d'une bobine longue, d'environ 1^m de longueur et de 20^{cm} de diamètre, portant deux couches de fil, tandis qu'il ne s'en produisait pas, lorsqu'on employait une bobine très plate, formée de vingt-cinq couches superposées.

C'est en possession des divers travaux que nous venons de rappeler et des conclusions auxquelles ils avaient conduit, que, prenant pour point de départ les derniers résultats de M. Hemsalech, nous avons entrepris d'examiner quelle était la nature des stries et quelle était la cause de leur présence. L'étude expérimentale à laquelle nous nous sommes livré, et dont l'exposé fera l'objet du second Chapitre, nous

(1) HEMSALECH, *Comptes rendus*, t. CXLVI, 1908, p. 1093.

a montré le rôle essentiel que joue dans le phénomène la capacité des bobines de self-induction ; nous avons cherché alors à établir la théorie mathématique des faits que nous venions de mettre en lumière ; cette étude de la décharge d'un condensateur à travers une bobine ayant de la capacité constitue le troisième Chapitre de ce travail ; enfin, dans une dernière Partie, nous rapprochons les conclusions du calcul des résultats de l'expérience : la concordance que nous constatons entre eux démontre l'exactitude des explications que nous avons proposées.



CHAPITRE II.

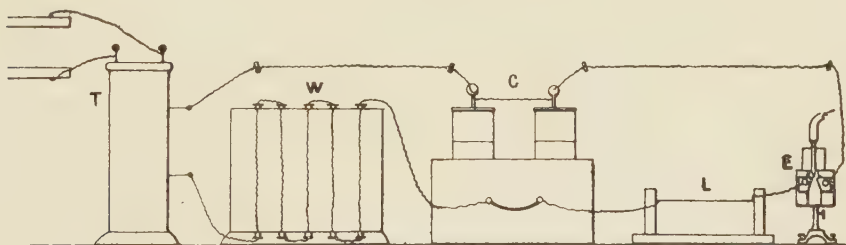
PARTIE EXPÉRIMENTALE.

DE LA CAPACITÉ DANS LES BOBINES DE SELF-INDUCTION.

I. *Méthodes d'observation.* — Dans les expériences que nous avons exécutées, nous nous sommes servi pour examiner l'étincelle des deux méthodes qu'avait employées M. Hemsalech : celle de la plaque photographique mobile ⁽¹⁾ et celle du courant d'air ⁽²⁾. Ces deux méthodes, qui d'ailleurs se complètent l'une l'autre, doivent être préférées à toutes les autres, en raison de leur simplicité et de leur précision.

Dispositif expérimental. — Un condensateur C se décharge à travers un circuit, comprenant un éclateur E, une ou plusieurs bobines de

Fig. 5.



self-induction L, des condensateurs auxiliaires, etc. ; le condensateur C reçoit sa charge par l'intermédiaire d'une résistance W, d'un transfor-

⁽¹⁾ Cf. p. 7.

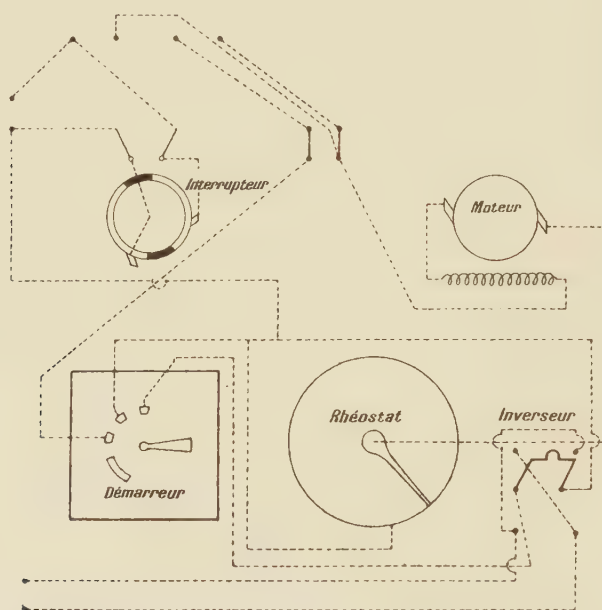
⁽²⁾ Cf. p. 8.

mateur T alimenté par un courant interrompu. La capacité de C est, dans toutes ces expériences, assez grande pour que la liaison permanente de C avec T n'apporte aucune perturbation à la décharge du condensateur à travers le circuit CLE.

Appareils. — Le transformateur employé est un appareil Saldana-Rochefort, pouvant donner 20^{cm} d'étincelle au secondaire; dans ces appareils, les deux enroulements et l'armature métallique sont plongés dans une substance consistante ⁽¹⁾.

L'interrupteur est du système Contremoulins; le schéma ci-après en fait comprendre la disposition (*fig. 6*).

Fig. 6.



Le condensateur dont on étudie la décharge est constitué dans les diverses expériences, soit par une batterie de bouteilles de Leyde, soit plus souvent par des plaques de verre de 3^{cm} d'épaisseur, recouvertes

(¹) Cette substance fondait lorsque le courant primaire atteignait la valeur de quelques ampères.

d'étain sur leurs deux faces; on peut donner à ce condensateur telle capacité qu'on veut, en prenant des plaques de grandeur convenable ou en disposant un certain nombre de ces plaques en parallèle et en cascade.

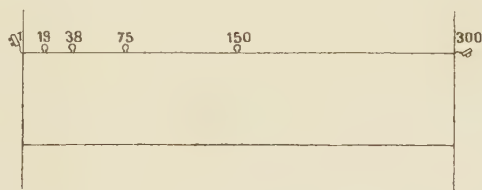
La bobine de self-induction, au travers de laquelle passe la décharge du condensateur, est l'organe le plus important; on a fait successivement usage dans ces expériences de cinq bobines différentes.

Bobine A ('). — C'est un long solénoïde à deux couches de fil, de 254 spires chacune; la carcasse est un cylindre en bois de 0^m,90 de longueur et 0^m,22 de diamètre. Cette bobine porte trois bornes permettant de faire passer le courant soit à travers les deux couches, soit à travers l'une d'elles seulement.

Bobine B. — La bobine est très plate; sa longueur, comptée suivant l'axe, est de quelques centimètres seulement; la carcasse est en bois; il y a vingt-cinq couches de fil de 25 spires chacune.

Bobine C. — La bobine C ne porte qu'une seule couche de fil, enroulée sur un cylindre en carton de 1^m de longueur et de 22^{cm} de diamètre; cette couche est formée de 300 spires. En outre des deux bornes

Fig. 7.



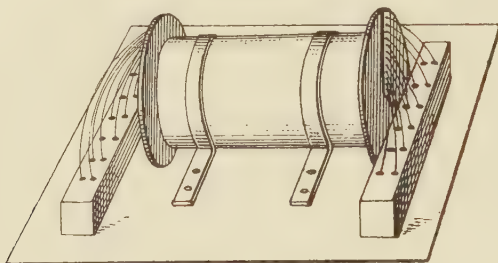
terminales, on trouve, en partant de l'une des extrémités, sur la 19^e, la 38^e, la 75^e et la 150^e spire, des prises de courant, formées par une petite portion dénudée de fil; grâce à ces prises, on peut réaliser

(') Les bobines A et B m'ont été prêtées par M. Hemsalech.

approximativement une self-induction de grandeur quelconque, inférieure à celle de la bobine totale.

Bobine D. — Cette bobine est intermédiaire entre les bobines A et B, elle porte douze couches de 150 spires chacune ; la carcasse est en bois, de 40^{cm} de longueur et 10^{cm} de diamètre, avec de grandes joues ; les couches sont isolées l'une de l'autre par du papier Meyrowski.

Fig. 8.



De petits godets à mercure sont disposés de part et d'autre de la bobine, en nombre égal au nombre des couches ; chacune des extrémités des fils formant les couches plonge dans un des godets, et l'on peut ainsi insérer dans le circuit de décharge telles couches qu'on veut.

Bobine E. — La bobine E est analogue à la précédente, mais plus petite ; elle n'a que 14^{cm} de longueur et porte douze couches de 12 spires chacune.

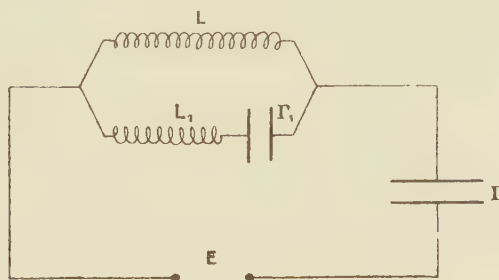
Elle n'a été employée qu'accessoirement.

II. PREMIÈRE SÉRIE D'EXPÉRIENCES. — Une première série d'expériences a eu pour but de montrer que des stries, identiques à celles qui prennent naissance dans les étincelles d'induction, peuvent être produites par la superposition de deux courants oscillatoires de fréquences très différentes.

Pour cela, on a réalisé le circuit de décharge suivant : entre l'une des armatures du condensateur Γ (fig. 9) et l'éclateur E sont disposés en

parallèle, d'une part, une bobine de self-induction L , d'autre part, un condensateur Γ_1 et une bobine L_1 . Les bobines L et L_1 sont telles qu'aucune d'elles ne produise de stries, si elle est intercalée seule dans

Fig. 9.



le circuit de décharge de Γ . Dans ces diverses expériences, nous faisons usage des bobines B et C, décrites plus haut, et nous nous assurons par une observation préalable que, si dans le schéma de la figure 9, on coupait l'une des deux branches L ou L_1 , la décharge, qui passait alors tout entière à travers l'autre branche, donnait lieu en E à une étincelle dépourvue de stries.

Au contraire, si, les deux branches L et L_1 étant rétablies, le courant traversait en parallèle les deux bobines, on observait en E des stries très nettes et de tous points semblables à celles qu'avait signalées M. Hemsalech. La présence du condensateur Γ_1 était d'ailleurs indispensable : les stries disparaissaient si l'on supprimait cet organe.

Pour préciser cette première observation, nous nous sommes proposé de déterminer, par une théorie analogue à celle de Thomson, le nombre de stries qui doivent se produire dans ces expériences pour des valeurs déterminées de L , L_1 , Γ et Γ_1 . L'étude de la décharge d'un condensateur à travers n branches disposées en parallèle, que Garbasso ⁽¹⁾ avait faite en 1902 en se servant des procédés de calcul symbolique introduits par L. Rayleigh, était trop générale pour pouvoir

(¹) GARBASSO, *Wiedemann Ann.*, t. VIII, 1902, p. 890.

être utilisée ici; le cas de deux branches avait été, il est vrai, traité spécialement par Mandelstamm ⁽¹⁾, qui s'était efforcé de déterminer les périodes avec plus de précision. Mais, pour l'étude des stries, en outre des périodes, il importait de connaître le rapport des amplitudes des deux oscillations; nous avons pu obtenir une expression simple de ce rapport, en négligeant les résistances ohmiques, qui dans toutes ces expériences sont très faibles.

Théorie. — Désignons par j et j_1 les valeurs instantanées des courants qui traversent les bobines L et L_1 à un moment donné t ; si l'on pose

$$\gamma = \frac{1}{L}, \quad \gamma_1 = \frac{1}{L} + \frac{1}{L_1},$$

on a pour déterminer j et j_1 les deux équations

$$(1) \quad L \frac{d^2 j}{dt^2} + \gamma(j + j_1) = 0,$$

$$(2) \quad L_1 \frac{d^2 j_1}{dt^2} + \gamma_1 j_1 + \gamma j = 0,$$

Faisons dans ces équations

$$j = A e^{i\sigma t}, \quad j_1 = A_1 e^{i\sigma t},$$

i désignant le symbole des quantités imaginaires; on obtient pour déterminer σ l'équation

$$(3) \quad \sigma^4 L L_1 - \sigma^2 (L \gamma_1 + L_1 \gamma) + \gamma(\gamma_1 - \gamma) = 0.$$

On en déduit

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_1}{L_1} + \frac{\gamma}{L} - \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{L_1} + \frac{\gamma}{L} \right)^2 - 4\gamma \frac{\gamma_1 - \gamma}{L L_1}} \right], \\ \sigma'^2 = \frac{1}{2} \left[\frac{\gamma_1}{L_1} + \frac{\gamma}{L} + \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{L_1} + \frac{\gamma}{L} \right)^2 - 4\gamma \frac{\gamma_1 - \gamma}{L L_1}} \right], \end{array} \right.$$

⁽¹⁾ MANDELSTAMM, *Ibid.*

et l'on a pour j et j_1 , des solutions de la forme

$$(5) \quad \begin{cases} j = A e^{i\sigma t} + B e^{-i\sigma t} + A' e^{i\sigma' t} + B' e^{-i\sigma' t}, \\ j_1 = A_1 e^{i\sigma t} + B_1 e^{-i\sigma t} + A'_1 e^{i\sigma' t} + B'_1 e^{-i\sigma' t}. \end{cases}$$

Convenons de prendre pour instant initial celui où l'étincelle s'amorce en E (fig. 9); le condensateur Γ_1 , jusqu'à ce moment, n'a reçu aucune charge; j et j_1 sont donc nuls à l'origine du temps; on en déduit

$$A + B = A' + B' = A_1 + B_1 = A'_1 + B'_1 = 0,$$

et le courant $j + j_1$, qui traverse l'éclateur, est

$$(6) \quad j + j_1 = 2 \frac{L}{\gamma} (P \sigma^2 \sin \sigma t + P' \sigma'^2 \sin \sigma' t),$$

P et P' étant deux constantes à déterminer.

Le courant $j + j_1$ est ainsi constitué par la superposition de deux courants sinusoïdaux, dont il est facile de calculer le rapport des périodes et le rapport des amplitudes.

1° Le rapport $\mathfrak{R}$ des périodes est égal à

$$(7) \quad \mathfrak{R} = \frac{\frac{\gamma_1}{L_1} + \frac{\gamma}{L} + \sqrt{\left(\frac{\gamma_1}{L_1} + \frac{\gamma}{L}\right)^2 - 4\gamma \frac{\gamma_1 - \gamma}{LL_1}}}{2\sqrt{\frac{\gamma(\gamma_1 - \gamma)}{LL_1}}},$$

c'est-à-dire, puisque γ est égal à $\frac{1}{L}$ et γ_1 à $\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L}$,

$$(8) \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{L\Gamma}{L_1\Gamma_1}} + \sqrt{\frac{L_1\Gamma_1}{L\Gamma}} + \sqrt{\frac{L\Gamma_1}{L_1\Gamma}} + \sqrt{\left(\sqrt{\frac{L\Gamma}{L_1\Gamma_1}} - \sqrt{\frac{L_1\Gamma_1}{L\Gamma}} - \sqrt{\frac{L\Gamma_1}{L_1\Gamma}}\right)^2 + 4\frac{\Gamma_1}{\Gamma}} \right].$$

2° Le rapport $\mathfrak{W}$ des amplitudes est représenté par

$$\mathfrak{W} = \frac{P\sigma^2}{P'\sigma'^2};$$

or, on a

$$\frac{P\sigma^3 + P'\sigma'^3}{P\sigma + P'\sigma'} = \gamma \left(\frac{1}{L} + \frac{1}{L_1} \right);$$

en désignant par k le second membre de cette égalité, on peut donc écrire $\mathfrak{W}$ sous la forme

$$(9) \quad \mathfrak{W} = \frac{\sigma}{\sigma'} \frac{k - \sigma'^2}{\sigma^2 - k}.$$

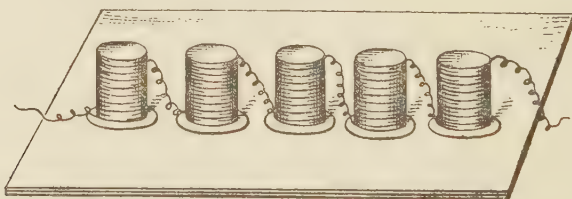
Vérifications expérimentales de la théorie. — En possession des formules (7) et (9), il est possible, connaissant les valeurs de Γ , L , Γ_1 , L_1 , de déterminer le nombre de stries qui se produiront dans chaque cas. Remarquons tout de suite que $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{W}$ ne dépendent que des deux rapports $\frac{L}{L_1}$ et $\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$, car l'on peut écrire

$$(10) \quad \mathfrak{W} = \frac{1}{\mathfrak{R}} \frac{1 + \frac{L}{L_1} - \frac{\Gamma}{\Gamma_1} \frac{L}{L_1} - \sqrt{\left(1 + \frac{L}{L_1} + \frac{\Gamma}{\Gamma_1} \frac{L}{L_1}\right)^2 - 4 \frac{\Gamma}{\Gamma_1} \frac{L}{L_1}}}{-1 - \frac{L}{L_1} + \frac{\Gamma}{\Gamma_1} \frac{L}{L_1} - \sqrt{\left(1 + \frac{L}{L_1} + \frac{\Gamma}{\Gamma_1} \frac{L}{L_1}\right)^2 - 4 \frac{\Gamma}{\Gamma_1} \frac{L}{L_1}}}.$$

Évaluons le rapport $\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$. Le diélectrique des deux condensateurs Γ et Γ_1 est formé par des plaques de verre de même épaisseur et de même nature; le rapport des capacités $\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$ est par conséquent égal au rapport des surfaces des armatures.

Le rapport $\frac{L}{L_1}$ s'évalue non moins aisément. En effet, on réalise les self-inductions L et L_1 en disposant en série, comme le montre la figure 10, un certain nombre de petites bobines construites sur le type

Fig. 10.



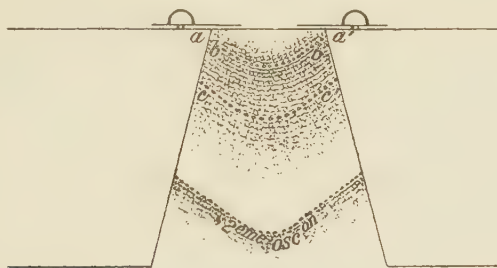
de la bobine C, mais ayant seulement 10^{cm} de longueur; on a soin de placer ces bobines élémentaires à une distance telle l'une de l'autre

qu'elles ne puissent s'influencer. Le rapport $\frac{L}{L_1}$ est alors égal au rapport du nombre des bobines constituant L au nombre des bobines constituant L_1 .

PREMIER CAS. — *Capacités différentes. Selfs égales.* — Les armatures des condensateurs Γ et Γ_1 sont des feuilles d'étain carrées et les côtés des deux carrés sont dans le rapport de 1 à 3,2; le rapport $\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$ est donc égal à 10; quant au rapport $\frac{L}{L_1}$, il est égal à l'unité, car les deux selfs L et L_1 ont le même nombre de bobines.

Dans ces conditions, si l'on fait passer la décharge et qu'on observe au moyen de la méthode du courant d'air l'étincelle produite en E, on constate la présence de deux stries; dans la première oscillation, où elles sont le plus nettes, ces deux stries sont disposées comme l'indique

Fig. 11.



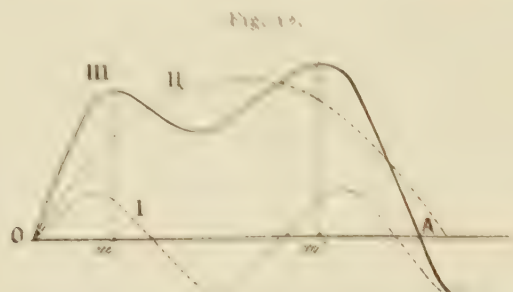
la figure 11 (¹). Sur la figure, la droite aa' représente le trait lumineux qui amorce l'étincelle, tandis que les courbes pointillées bb' et cc' marquent l'emplacement des deux stries qu'on aperçoit dans la première oscillation.

Voyons maintenant ce que donne le calcul. Le rapport $\mathcal{R}$ des périodes s'obtient en faisant, dans la formule (8), $\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$ égal à 10 et $\frac{L}{L_1}$ égal à l'unité; on trouve ainsi pour $\mathcal{R}$ la valeur 3,4.

(¹) Le phénomène est difficile à photographier, à cause de son peu de luminosité.

Quant au rapport $\frac{L_2}{L_1}$ des amplitudes, fourni par la formule (10), il a pour valeur 2,6.

Les deux oscillations peuvent donc être représentées par les courbes I et II de la figure 12; ces deux courbes sont des sinusoïdes,



dont le rapport des périodes est 3,4 et le rapport des amplitudes 2,6; elles passent toutes deux par l'origine.

Le courant électrique qui produit l'étincelle est la superposition des deux courants représentés par les courbes I et II; il est donc lui-même figuré par la courbe III (en trait plein), qui s'obtient en additionnant pour chaque valeur de x les ordonnées correspondant aux courbes I et II. Comme cette courbe III présente deux maxima, on voit que le courant correspondant donnera naissance à une étincelle qui, dans la première oscillation, c'est-à-dire entre O et A, présentera deux stries; celles-ci se produiront pour des valeurs de x égales à Om et à Om' , et par suite elles occuperont sensiblement dans la première oscillation la place que nous avons figurée sur la figure 11. L'expérience et la théorie fournissent donc des résultats concordants.

DEUXIÈME CAS. — *Capacités différentes. Selfs inégales.* — On trouve, en évaluant comme plus haut le rapport des surfaces d'armature des deux condensateurs Γ et Γ_1 et le rapport du nombre de bobines qui forment L et L_1 , $\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$ égal à 10 et $\frac{L}{L_1}$ égal à 10.

On fait passer la décharge, on observe l'étincelle et l'on constate qu'il n'y a pas de stries; on voit seulement des oscillations simples,

d'ailleurs très rapides. Si nous faisons d'autre part le calcul de $\mathfrak{R}$ et de $\mathfrak{Q}$, en portant dans les formules (8) et (10) les valeurs correspondantes de $\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$ et de $\frac{L}{L_1}$, il vient

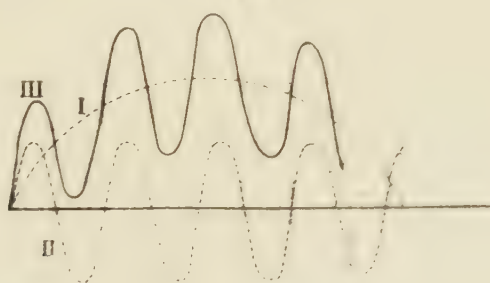
$$\mathfrak{R} = 10, \quad \mathfrak{Q} = 0,9.$$

Le courant total est ici la somme de deux courants, dont l'un a une fréquence décuple de la fréquence de l'autre; mais, comme ces deux courants ont des amplitudes sensiblement égales, il ne doit pas y avoir production de stries. Le courant dont la période est la plus grande est masqué, et il intervient seulement pour renforcer l'intensité de la première, de la troisième, etc. oscillations du courant plus rapide et pour diminuer l'intensité de la deuxième, quatrième, etc. oscillations de ce même courant.

La théorie explique donc l'absence de stries, que nous avons constatée par l'expérience.

TROISIÈME CAS. — *Capacités très différentes. Selfs peu différentes.* — On trouve alors, en opérant comme plus haut, $\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$ égal à 16 et $\frac{L}{L_1}$ égal à 4; par suite, les rapports $\mathfrak{R}$ et $\mathfrak{Q}$ prennent respectivement les valeurs 8 et 1,8.

Fig. 13.



Le courant qui traverse l'éclateur est donc la somme de deux courants qui peuvent être représentés par les courbes I et II de la figure 13; la courbe III (en trait plein), obtenue en additionnant pour chaque valeur de x les ordonnées des courbes I et II, représente le courant

total. On voit que, dans la première oscillation, il doit se produire quatre stries, correspondant aux quatre maxima de l'intensité du courant.

Si l'on fait l'expérience, on constate en effet que, dans la première oscillation fondamentale, apparaissent quatre stries très nettes et équidistantes.

Il y a donc ici encore concordance parfaite entre les résultats de la théorie et de l'expérience.

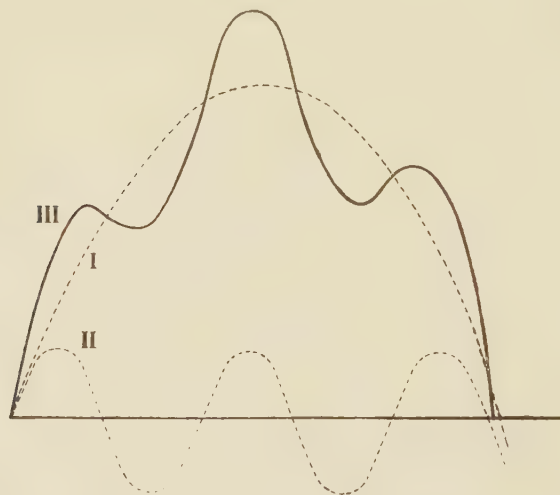
QUATRIÈME CAS. — *Capacités très différentes. Selfs égales.* — On a dans ce cas $\frac{\Gamma}{\Gamma_1}$ égal à 25, $\frac{L}{L_1}$ égal à 1.

L'expérience décèle dans la première oscillation trois stries, parmi lesquelles celle du milieu est nettement la plus lumineuse. Le calcul permet de prévoir ce résultat; en effet, on trouve aisément

$$\mathfrak{R} = 5,1, \quad \Psi = 4,6.$$

Par suite, les deux courants sinusoïdaux, dont la superposition forme

Fig. 14.



le courant qui produit l'étincelle, ont la forme des courbes I et II sur la figure 14. Le courant total a dès lors la forme de la courbe III,

et son intensité doit présenter, dans la première oscillation, trois maxima, dont un plus considérable que les autres.

CINQUIÈME CAS. — *Rapport de capacités infini* $\frac{\Gamma}{\Gamma_1} = \infty$. — Supposons que, dans le calcul, on fasse Γ_1 nul; $\mathfrak{G}$ et σ' sont alors infinis et σ^2 est égal à $\frac{1}{\Gamma L}$; le calcul fait donc prévoir qu'il existera une oscillation unique de période $2\pi\sqrt{\Gamma L}$.

Or, supposer Γ_1 nul équivaut à supposer qu'on a coupé la branche de dérivation sur laquelle sont placés le condensateur Γ_1 et la self L_1 ; on se trouve donc dans les conditions de la théorie de Thomson, et l'on a alors une seule oscillation de fréquence $\frac{1}{2\pi\sqrt{\Gamma L}}$.

SIXIÈME CAS. — *Rapport de capacités nul* $\frac{\Gamma}{\Gamma_1} = 0$. — Nous avons vu que, si l'on mettait en court-circuit les armatures du condensateur Γ_1 , on n'observait jamais de stries.

Or, opérer ainsi équivaut à faire Γ_1 infini, et les formules donnent

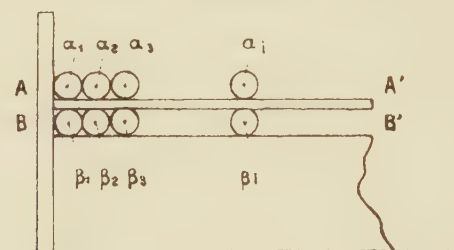
$$\sigma^2 = \frac{1}{\Gamma L} - \sigma'^2 = 0, \quad \frac{1}{\mathfrak{R}} - \mathfrak{G}^2 = 0.$$

L'un des deux courants élémentaires a alors une amplitude nulle; il disparaît, et il n'y a jamais de stries.

III. DEUXIÈME SÉRIE D'EXPÉRIENCES. — Les expériences précédentes montraient que la superposition de deux oscillations de fréquence différente pouvait dans certains cas faire naître dans l'étincelle des stries analogues à celles qu'avait signalées M. Hemsalech. Il restait à reconnaître que, lorsque le condensateur se décharge simplement à travers une bobine portant plusieurs couches de fil, il existe, en outre du circuit principal constitué par la bobine elle-même, un circuit auxiliaire, disposé en parallèle avec le premier et jouant le même rôle que la branche $L_1 C_1$ dans les expériences précédentes.

Remarques sur la capacité d'une bobine de self. — Il importe tout d'abord d'indiquer de façon précise ce qu'on entend par capacité d'une bobine de self-induction. Considérons dans ce but une bobine portant seulement deux couches de fil, AA' et BB'; la figure 15 représente la coupe de cette bobine par un plan qui contient l'axe;

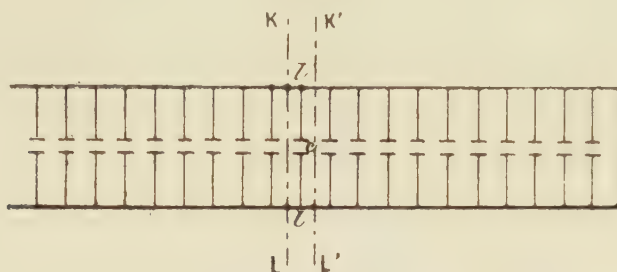
Fig. 15.



$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$, et $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots$ sont les sections par le plan de coupe des conducteurs formant les couches AA' et BB'; l'espace compris entre ces conducteurs est occupé en partie par le caoutchouc qui les entoure, et en partie par l'isolant (papier buvard paraffiné, papier Meyrowski, etc.) qu'on interpose entre les deux couches. A un moment quelconque, il existe entre deux points tels que α_i et β_i , situés vis-à-vis l'un de l'autre dans ces deux couches, une certaine différence de potentiel V_i ; il va donc s'accumuler sur les conducteurs α_i et β_i des quantités d'électricité, égales et de signes contraires, dont la masse subira en fonction du temps les mêmes variations que la différence de potentiel V_i . Tout se passera comme si l'un quelconque des éléments de fil appartenant à la couche AA' et l'élément de BB' qui lui est juxtaposé formaient les deux armatures d'un condensateur. On peut donc, à ce point de vue, considérer une bobine à deux couches comme formée par la juxtaposition de sections infiniment petites KLK'L' (fig. 16), dont chacune possède une self-induction l et une capacité figurée par le condensateur c . Si l'on rapproche le schéma ainsi obtenu de la figure 9, on conçoit que, puisqu'il se produit des stries dans un cas, il doit aussi s'en produire dans l'autre.

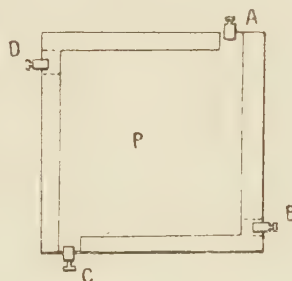
Étudions donc la dépendance qui existe entre la capacité de la bobine et la présence des stries.

Fig. 16.



Première expérience ⁽¹⁾. — Une plaque P carrée, en verre, est recouverte de papier d'étain sur chacune de ses deux faces 1 et 2 (fig. 17 et 18); ces deux feuilles de papier d'étain sont isolées l'une

Fig. 17.



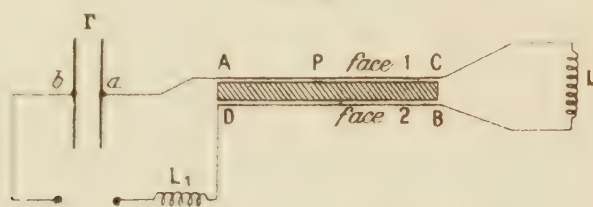
de l'autre. Aux quatre coins A, B, C, D de la plaque sont montées quatre bornes, dont deux, placées en diagonale, A et C, sont reliées à l'étain de la face 1, et les deux autres, sur l'autre diagonale, à l'étain de la face 2.

Soit Γ le condensateur dont on étudie la décharge; on met en contact l'une de ses armatures a avec la borne A de la plaque P et l'autre armature avec l'une des électrodes de l'éclateur; la seconde électrode est réunie à la borne D de la plaque P par l'intermédiaire de la self L_1 ,

⁽¹⁾ André LÉAUTÉ, *Comptes rendus*, t. CXLVI, 1908, p. 1209.

constituée par la bobine E (¹); enfin les extrémités de la self L, formée par la bobine B (²), sont connectées en B et C sur la plaque P. Le circuit étant ainsi établi, si l'on supprime la plaque P, de façon à relier directement A à C et B à D, on constate que l'étincelle produite à l'éclateur ne présente pas de stries; si au contraire on rétablit la plaque P, on voit apparaître des stries très nettes, dont le nombre dépend des dimensions de cette plaque.

Fig. 18.



Dans cette expérience, la plaque P remplit une double fonction : d'une part elle forme condensateur, et d'autre part chacune de ses armatures constitue une portion du circuit de décharge. On voit donc que la plaque P joue ici un rôle analogue à celui que jouaient les deux éléments α_i et β_i dans la figure 15; et comme l'expérience précédente montre que la capacité de P provoque la présence de stries dans l'étincelle, il en résulte que la capacité des éléments α_i et β_i doit produire le même effet.

Deuxième expérience (³). — Pour mettre mieux en lumière l'analogie qui existe entre le rôle que joue P et celui que jouent les deux éléments α_i et β_i , on remplace la plaque par deux couches consécutives d'une bobine de self-induction. En effet, ces deux couches auront l'une par rapport à l'autre une certaine capacité; d'autre part, chacune d'elles servira de conducteur au courant de décharge; l'ensemble des

(¹) Cf. p. 6.

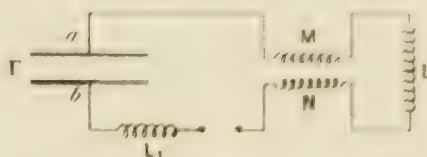
(²) Cf. p. 15.

(³) André LÉAUTÉ, *Comptes rendus*, t. CXLVI, 1908, p. 1209.

deux couches remplira donc la double fonction que remplissait la plaque P.

Le schéma de montage est le suivant : à partir de l'armature a du condensateur Γ le circuit comprend une couche M de la bobine D ⁽¹⁾, puis la bobine B ⁽²⁾ qui forme la self L_1 , ensuite la seconde couche N de la bobine D; on aboutit ainsi à l'une des électrodes de l'éclateur.

Fig. 19



L'autre électrode est reliée à l'armature b du condensateur Γ par l'intermédiaire de la bobine E, qui forme la self L_1 . Les extrémités M et N sont connectées, de façon que l'ensemble des deux couches ait une self-induction nulle.

Dans ces conditions, on observe des stries très nettes, qui d'ailleurs disparaissent si l'on met hors circuit les couches M et N. Comme la self-induction de M et N est nulle, c'est bien à la capacité de ces couches l'une par rapport à l'autre qu'il faut attribuer les stries observées.

Le phénomène subsiste si l'on augmente la longueur des couches M et N, en diminuant au fur et à mesure l'importance de la self L_1 ; on peut concevoir qu'on aille ainsi jusqu'à supprimer complètement Γ , et l'on retombe alors sur le cas où la décharge parcourt simplement une bobine à deux couches.

Troisième expérience. — Pour mettre en évidence l'influence de la capacité que les deux couches présentent l'une par rapport à l'autre, il suffit de reprendre l'expérience précédente en employant pour M et N des couches de plus en plus éloignées l'une de l'autre. Plus l'écar-

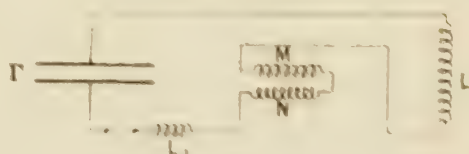
(¹) Cf. p. 16.

(²) Cf. p. 15.

tement de ces couches s'accroît, plus les stries s'atténuent. On peut arriver même ainsi à étouffer les stries complètement.

Quatrième expérience. — Pour que les stries se produisent, il est nécessaire qu'il y ait entre les couches M et N une différence de potentiel suffisante; on le montre de la façon suivante :

Fig. 20.



Reprenons le dispositif de la figure 19, et disposons les deux couches M et N d'un même côté de la self L. La différence de potentiel entre M et N est modifiée, et l'on constate que cette inversion suffit pour faire disparaître toute trace de stries. Il y a donc une valeur de la différence de potentiel entre M et N, au-dessous de laquelle ces stries ne se produisent pas.

Cinquième expérience (Dédoublément des stries). — On réalise le dédoublément des stries, en constituant la self L du schéma 19 par une bobine à deux couches [bobine A ⁽¹⁾]. L'expérience est particulièrement nette quand on dispose d'un commutateur qui permet de substituer brusquement une bobine à deux couches à la bobine plate B précédemment employée. Les stries se divisent et donnent lieu à des stries secondaires d'une finesse extrême.

Nous avons également réalisé cette expérience en nous servant de la plaque P et du schéma de la figure 18.

IV. CONCLUSION. — Nous avons établi par ce qui précède que la présence de stries dans les étincelles d'induction et l'existence d'une

(¹) Cf. p. 15.

certaine capacité dans la bobine sont deux faits concomitants. Pour déterminer la relation qui existe entre les deux phénomènes et analyser leur dépendance, il faut entreprendre l'étude mathématique directe de la décharge d'un condensateur à travers une bobine présentant de la capacité ; cette recherche théorique fera l'objet du prochain Chapitre.

CHAPITRE III.

PARTIE THÉORIQUE.

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE LA DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR A TRAVERS UNE BOBINE PRÉSENTANT DE LA CAPACITÉ.

I. EXPOSÉ DE LA QUESTION. SIMPLIFICATIONS FAITES. — Si l'on considère que la grande simplicité de la théorie de Thomson, relative à la décharge des condensateurs, provient de ce qu'on suppose nulle la capacité du circuit par lequel on réunit les deux armatures, on doit s'attendre, dans le cas où ce circuit est au contraire formé par une bobine ayant de la capacité, à rencontrer des difficultés analytiques assez grandes. Ces difficultés sont telles que, pour aborder utilement la question, il est indispensable, avant tout calcul, d'admettre quelques simplifications.

Les seuls travaux antérieurs dont on puisse s'inspirer sont ceux de Kirchhoff ⁽¹⁾ et ceux de Cohn et Heerwagen ⁽²⁾. Mais Kirchhoff, s'il est vrai qu'il étudiait la décharge à travers un conducteur présentant de la capacité, n'en excluait pas moins expressément le cas où ce conducteur serait enroulé sur une bobine, car il admettait que dans le circuit deux points séparés par une longueur de fil finie ne pouvaient jamais se trouver à une distance infiniment petite l'un de l'autre ; quant à Cohn et Heerwagen, leur calcul ne saurait en aucune façon s'appliquer au problème que nous traitons ici, car les formules qu'employaient

⁽¹⁾ KIRCHHOFF, *Cf.* Chap. I, p. 2.

⁽²⁾ COHN et HEERWAGEN, *Cf.* Chap. I, p. 4.

ces deux physiciens, et qui résultaient de la théorie de Maxwell, se compliqueraient d'inextricable façon, si l'on substituait un solénoïde aux deux fils rectilignes et parallèles qu'ils considéraient.

Il est donc impossible, pour étudier la décharge d'un condensateur à travers une bobine, de s'appuyer sur aucune des théories précédemment établies; c'est une tout autre voie qu'il faut suivre. Avant de l'indiquer, nous énumérerons d'abord les simplifications que nous devons faire.

Première simplification. — La bobine étudiée porte seulement deux couches; la capacité y est uniformément répartie et la résistance ohmique est supposée négligeable.

Deuxième simplification. — Nous ferons une hypothèse destinée à simplifier le calcul de la force électromotrice d'induction que les différentes spires de la bobine exercent sur un élément déterminé de l'une d'elles.

En raison de la capacité de la bobine, l'intensité du courant n'est pas la même à un instant donné en tous les points du circuit. Mais comme cette capacité est, somme toute, assez faible (¹), nous admettrons que, pour évaluer la force électromotrice d'induction qui s'exerce sur un élément du fil, il est permis de négliger la variation du courant le long de la bobine.

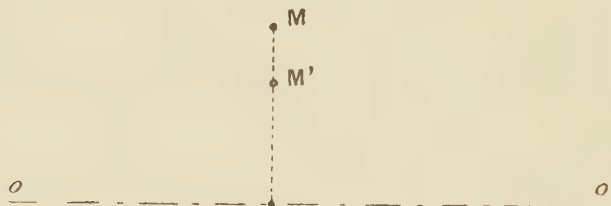
Troisième simplification. — Nous supposerons enfin que la bobine est assez longue pour qu'on puisse ne pas tenir compte de l'influence de ses extrémités.

II. MISE EN ÉQUATION. — Considérons une bobine ayant pour carcasse un cylindre de révolution d'axe OO' ; sur ce cylindre sont disposées en hélice les deux couches de fil; à tout point M de la couche extérieure (*fig.* 23) correspond sur la couche intérieure un point M' ,

(¹) Ceci sera confirmé par les chiffres donnés au Chapitre IV.

tel que la droite MM' rencontre l'axe OO' et lui soit perpendiculaire. Si A, A' sont les deux bornes de la bobine et B, B' les autres extrémités des deux couches, nous désignerons par x la longueur de fil

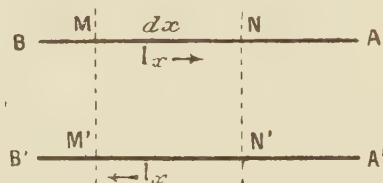
Fig. 21.



qui sépare le point M de B et la longueur sensiblement égale qui sépare M' de B' .

Prenons l'élément de fil MN , de longueur dx , comptée à partir du point M dans le sens BM , et l'élément $M'N'$, de longueur dx , comptée dans le sens $B'M'$. Soit I_x l'intensité au point M , comptée dans le

Fig. 22.



sens MN , ou l'intensité au point M' , comptée dans le sens $N'M'$; soit V_x la différence de potentiel entre M et M' . Les deux quantités I_x et V_x sont des fonctions de x et de t , qu'il s'agit de déterminer.

D'après ce qui a été vu plus haut, les éléments MN et $M'N'$ fonctionnent comme les armatures d'un condensateur, dont on appellera $2\gamma dx$ la capacité; on aura donc, entre I_x et V_x , une première relation

$$(1) \quad \frac{\partial I_x}{\partial x} = -2\gamma \frac{\partial V_x}{\partial t}.$$

Évaluons maintenant la variation que subit V_x , quand on se déplace

de MM' en NN' ; cette variation est égale, puisque la résistance ohmique est négligeable, à la force électromotrice d'induction qui s'exerce sur les éléments MN et $N'M'$. D'après la seconde des suppositions faites page 33, on pourra représenter cette force électromotrice par une expression de la forme

$$\lambda I_x dx,$$

et par suite la deuxième équation aux dérivées partielles s'écrira

$$(2) \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} = -2\lambda \frac{\partial I_x}{\partial t}.$$

Les coefficients γ et λ ne dépendent pas de t ; on sait de plus ⁽¹⁾ qu'ils sont indépendants de x .

Les égalités (1) et (2) montrent que chacune des quantités I_x et V_x satisfait à une équation de même forme que l'équation des cordes vibrantes; pour achever de déterminer ces fonctions, il faut préciser quelles sont les conditions aux limites et les conditions initiales.

Conditions aux limites. — La première condition aux limites exprime que les deux couches de fils sont en communication à l'une des extrémités de la bobine; cette condition s'écrit

$$(3) \quad V_0 = 0.$$

La seconde condition s'obtient en écrivant que la bobine est reliée en A et A' aux armatures d'un condensateur de capacité Γ ; si donc on désigne par $2d$ la longueur totale du fil enroulé sur la bobine, on peut écrire

$$(4) \quad \Gamma \frac{dV_d}{dt} = I_d,$$

et l'on a ainsi la seconde équation aux limites.

Conditions initiales. — Il est toujours permis de supposer qu'avant

⁽¹⁾ Cf. p. 33.

l'instant initial on a établi les connexions¹ nécessaires pour réaliser telle distribution qu'on veut de l'intensité I et du potentiel V , au moment où $t=0$; on supposera, bien entendu, que ces connexions accessoires sont brusquement coupées à l'instant origine. Les fonctions I et V doivent donc être telles qu'on ait

$$(5) \quad I = i(x), \quad V = v(x),$$

quel que soit x , pour $t=0$, $i(x)$ et $v(x)$ étant deux fonctions arbitrairement données.

III. RÉOLUTION DES ÉQUATIONS. — Nous avons à résoudre le système suivant :

$$(1) \quad \frac{\partial I_x}{\partial x} = -2\gamma \frac{\partial V_x}{\partial t},$$

$$(2) \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} = -2\lambda \frac{\partial I_x}{\partial t},$$

avec les conditions aux limites

$$(3) \quad V_0 = 0,$$

$$(4) \quad \Gamma \frac{dV_d}{dt} = I_d,$$

et les conditions initiales

$$(5) \quad I = i(x), \quad V = v(x), \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

Reprenant une méthode employée par Fourier (¹) dans sa théorie mathématique de la chaleur, cherchons une « solution simple » des équations aux dérivées partielles (1) et (2). Pour cela, posons, en désignant par A , B et m des constantes et par u une fonction de x ,

$$(6) \quad V_x = (A \sin mt + B \cos mt)u.$$

On voit aisément que u doit satisfaire à l'équation

$$(7) \quad \frac{d^2 u}{dx^2} + 4\lambda\gamma m^2 u = 0,$$

(¹) Cf. E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2^e édition, t. II, p. 192.

c'est-à-dire qu'on doit poser

$$(8) \quad u = \sin(2m\sqrt{\lambda\gamma}x + \xi).$$

Les égalités (1) et (2) font alors connaître V_x et I_x , à savoir

$$(9) \quad V_x = (A \sin mt + B \cos mt) \sin(2m\sqrt{\lambda\gamma}x + \xi),$$

$$(10) \quad I_x = \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} (A \cos mt - B \sin mt) \cos(2m\sqrt{\lambda\gamma}x + \xi).$$

Exprimons que cette solution simple satisfait aux conditions aux limites (3) et (4), et déterminons ainsi la valeur des deux constantes m et ξ .

Tout d'abord, il faut que la quantité V s'annule pour $x=0$; ceci exige que ξ soit nul, en sorte qu'on a

$$\begin{aligned} V_x &= (A \sin mt + B \cos mt) \sin(2m\sqrt{\lambda\gamma}x), \\ I_x &= \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} (A \cos mt - B \sin mt) \cos(2m\sqrt{\lambda\gamma}x). \end{aligned}$$

Portons ces valeurs dans l'équation (4), qui doit être vérifiée pour $z=d$; il vient

$$\left[\Gamma m \sin(2m\sqrt{\lambda\gamma}d) - \sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} \cos(2m\sqrt{\lambda\gamma}d) \right] (A \cos mt - B \sin mt) = 0,$$

c'est-à-dire, en posant

$$(11) \quad k = \frac{\Gamma}{2\gamma d},$$

$$(12) \quad \cot(2m\sqrt{\lambda\gamma}d) - k 2m\sqrt{\lambda\gamma}d = 0.$$

L'équation (12), qui détermine m , admet, comme on le reconnaît aisément, une infinité de racines réelles, dont une seulement est comprise entre $n\pi$ et $\frac{2n+1}{2}\pi$, quel que soit n ; cette racine est d'ailleurs d'autant plus voisine de $n\pi$ que n est plus grand.

Lorsqu'on change soit la capacité Γ , soit les coefficients λ et γ , soit la longueur d , on fait varier la racine dont il s'agit; plus k est grand,

plus la racine est proche de $n\pi$; nous montrerons dans le Chapitre suivant l'importance physique de cette remarque.

Pour pousser plus avant l'étude mathématique du système d'équations que nous nous sommes proposé de résoudre, il nous faut maintenant chercher à en former la solution générale.

Dans ce but, nous poserons

$$(13) \quad h = k\pi,$$

$$(14) \quad \pi v = 2m\sqrt{k\gamma}d,$$

ce qui revient à désigner par v l'une des racines de l'équation

$$(15) \quad \cot(\pi v) - hv = 0;$$

de plus, nous désignerons par w et j les deux suites illimitées

$$(16) \quad \left| \begin{aligned} w = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A \sin \frac{\pi v t}{2\sqrt{k\gamma}d} + B \cos \frac{\pi v t}{2\sqrt{k\gamma}d} \right) \sin \frac{\pi v x}{d}, \end{aligned} \right.$$

$$(17) \quad \left| \begin{aligned} j = \sqrt{\frac{\gamma}{k}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(A \cos \frac{\pi v t}{2\sqrt{k\gamma}d} - B \sin \frac{\pi v t}{2\sqrt{k\gamma}d} \right) \cos \frac{\pi v x}{d}, \end{aligned} \right.$$

dans lesquelles les sommations qui figurent aux seconds membres s'étendent à toutes les racines de l'équation (15).

Nous allons voir qu'on peut déterminer les coefficients A et B de ces suites, de façon que si, dans chacune d'elles, on fait $t=0$, on ait

$$w = v(x) + K,$$

$$j = i(x),$$

$v(x)$ et $i(x)$ étant les deux fonctions qui figurent dans les égalités (5), et K étant une constante.

IV. ÉTUDE DE LA GÉNÉRALITÉ DE LA SOLUTION TROUVÉE. — Considérons une fonction $\varphi(x)$, égale à $v(x)$ pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(0, d)$ et égale à $-v(-x)$ pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(0, -d)$; désignons par $\psi(x)$ une fonction égale à $i(x)$ dans l'intervalle $(0, d)$ et à $i(-x)$ dans l'intervalle $(0, -d)$;

enfin posons

$$f\left(\frac{x}{2d}\right) = \varphi(x) + \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \psi(x).$$

Pour qu'on ait

$$w = \varphi(x) + K \quad \text{et} \quad j = \psi(x)$$

dans l'intervalle $(0, d)$ il faut et il suffit qu'on ait

$$(18) \quad w + \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} j = f\left(\frac{x}{2d}\right) + K,$$

pour toutes les valeurs de x comprises dans l'intervalle $(-d, d)$.

Formons la fonction $w + \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} j$; cette fonction s'obtiendra, sous certaines réserves de convergence que nous examinerons plus loin, en additionnant deux à deux les termes de même rang des séries w et $\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} j$ et en faisant dans chacun d'eux $t = 0$. Il vient ainsi

$$(19) \quad w + \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} j = \sum \left(A \cos \frac{\pi \nu x}{d} + B \sin \frac{\pi \nu x}{d} \right).$$

Tout revient donc à démontrer, en posant pour plus de simplicité

$$\frac{x}{2d} = \tau,$$

qu'on peut déterminer les coefficients A et B de façon qu'on ait, pour les valeurs de τ comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$,

$$(20) \quad f(\tau) = \sum_{\nu=1}^{\infty} [A \cos(2\pi\nu\tau) + B \sin(2\pi\nu\tau)] - K.$$

Étude du développement $\sum [A \cos(2\pi\nu\tau) + B \sin(2\pi\nu\tau)]$. — Désignons par z une variable complexe de la forme $x + yi$, et soient $\psi(z)$ et $\pi(z)$ deux fonctions holomorphes de z ; considérons enfin la

fonction

$$\varphi(z, \tau) = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \varphi(\mu) e^{z(\tau-\mu)} d\mu,$$

où τ et μ sont deux paramètres réels.

Posons

$$F(z) = \frac{\psi(z) \varphi(z, \tau)}{\pi(z)},$$

et remarquons qu'à l'intérieur d'un cercle quelconque de centre O et de rayon r la fonction $F(z)$ a pour pôles les zéros de $\pi(z)$. Si l'on désigne par ΣR la somme des résidus de $F(z)$ relatifs aux pôles situés dans ce cercle, on a

$$(21) \quad \frac{1}{2\pi i} \int F(z) dz = \Sigma R,$$

l'intégrale étant prise le long du cercle.

Ceci posé, considérons une suite illimitée

$$r_1, \quad r_2, \quad r_3, \quad \dots, \quad r_n, \quad \dots,$$

telle qu'on ait, quel que soit n ,

$$r_n > r_{n-1}$$

et telle que r_n croisse indéfiniment avec n . Nous supposons qu'aucun pôle de la fonction $F(z)$ ne se trouve sur la circonférence d'un cercle C_n de centre O et de rayon r_n ; on peut alors écrire l'égalité (21) en spécifiant que l'intégrale qui y figure est prise le long de la circonférence du cercle C_n et que la somme du second membre comprend tous les pôles de $F(z)$ intérieurs à C_n .

Lorsqu'on fait croître n indéfiniment, on sait que le premier membre de l'égalité (21) tend vers une limite, si les fonctions $f(\mu)$, $\psi(z)$ et $\pi(z)$ remplissent certaines conditions, que nous allons rappeler (1).

(1) E. PICARD, *Traité d'Analyse*, 2^e édition, t. II, p. 182.

1° La fonction $\varphi(\mu)$ satisfait, lorsque μ reste compris dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$, aux conditions de Dirichlet.

2° Le rapport $\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}$, dans lequel z est relatif à un point placé sur la circonférence du cercle C_n , tend vers une limite quand n croît indéfiniment, et cela quel que soit l'angle φ de l'expression $z = r_n e^{i\varphi}$, à condition qu'on ait

$$0 \leq \varphi \leq \pi.$$

Certaines directions φ_0 pourront d'ailleurs être exceptées, à condition qu'elles soient en nombre limité et que le rapport $\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}$ garde une valeur finie $\varphi = \varphi_0$.

3° Dans les mêmes conditions et sous la même restriction relative aux directions privilégiées φ_0 , les produits

$$e^{z\left(\mu + \frac{1}{2}\right)} \frac{\psi(z)}{\pi(z)}, \quad e^{z\left(\frac{1}{2} - \mu\right)} \frac{\pi(-z) - \psi(-z)}{\pi(-z)}$$

tendent vers zéro quand n croît indéfiniment.

Lorsque ces conditions sont satisfaites, le premier membre de l'égalité (21) a une limite, qu'on démontre être égale à $\varphi(\tau)$, et il en résulte que l'égalité (21) se transforme en la suivante :

$$(22) \quad \varphi(\tau) = - \sum \frac{\psi(\lambda)}{\pi'(\lambda)} e^{\lambda\tau} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-\lambda\mu} \varphi(\mu) d\mu,$$

dans laquelle la sommation du second membre est étendue aux racines λ de l'équation $\pi(\lambda) = 0$.

Ceci posé, nous nous proposons d'établir la légitimité du développement (21) et de déterminer les coefficients A et B qui y figurent.

En conservant à h la même valeur que dans l'équation (15), nous poserons

$$\pi(z) = e^{\frac{z}{2}} \left(\frac{h}{2\pi} z + 1 \right) + e^{-\frac{z}{2}} \left(-\frac{h}{2\pi} z + 1 \right),$$

$$\psi(z) = e^{-\frac{z}{2}} \left(-\frac{h}{2\pi} z + 1 \right).$$

Vérifions d'abord que ces valeurs de $\pi(z)$ et de $\psi(z)$ satisfont aux conditions de légitimité du développement (21).

En premier lieu, on voit que le rapport $\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}$ est égal à

$$\frac{e^{\frac{z}{2}\left(\frac{h}{2\pi}z+1\right)}}{e^{-\frac{z}{2}\left(-\frac{h}{2\pi}z+1\right)} + e^{\frac{z}{2}\left(\frac{h}{2\pi}z+1\right)}};$$

si l'on suppose que z n'est pas une imaginaire pure, on constate aisément que ce rapport tend vers l'unité, lorsque le rayon du cercle, sur lequel se trouve le point z , croît indéfiniment.

Quant au cas de $z = \beta i$, il faut l'examiner séparément. L'hypothèse $z = 2k\pi i$ (k entier) est inadmissible, car le rapport $\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}$ croîtrait indéfiniment avec k ; il faut donc supposer, ce qui est toujours permis, qu'aucune des quantités r_n n'est de la forme

$$r_n = 2k\pi.$$

Pour toute autre valeur de r_n , le rapport $\frac{\psi(-z)}{\pi(-z)}$ reste fini, quand z croît indéfiniment en restant sur l'axe des quantités imaginaires, et il en résulte que la première condition de légitimité du développement (21) est satisfaite.

Examinons maintenant le produit

$$e^{z\left(\mu+\frac{1}{2}\right)} \frac{\psi(z)}{\pi(z)} \quad \left(-\frac{1}{2} < \mu < \frac{1}{2}\right)$$

qui, dans le cas que nous étudions, est égal à

$$\frac{e^{\mu z} \left(\frac{h}{2\pi} z + 1 \right)}{e^{\frac{z}{2} \left(\frac{h}{2\pi} z + 1 \right)} + e^{-\frac{z}{2} \left(-\frac{h}{2\pi} z + 1 \right)}}.$$

On voit immédiatement que ce produit tend vers zéro, quand le point z s'éloigne indéfiniment dans toute autre direction que celle des quan-

tités imaginaires pures. Reste le cas où $z = \beta i$, cas qu'on doit examiner en supposant β différent de $2k\pi$ (k entier); on se rend compte immédiatement que moyennant cette restriction le produit $e^{z(\mu + \frac{1}{2})} \frac{\psi(z)}{\pi(z)}$ reste encore fini dans ce cas, quand z croît au delà de toute limite.

La seconde condition de légitimité du développement (21) est donc satisfaite, et l'on verrait d'une façon identique qu'il en est de même de la troisième, relative au produit

$$e^{z(\frac{1}{2} - \mu)} \frac{\pi(-z) - \psi(-z)}{\pi(-z)}.$$

On en conclut que

$$(22 \text{ bis}) \quad \varphi(\tau) = - \sum \frac{\psi(\lambda i)}{\pi'(\lambda i)} e^{\lambda \tau i} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-\lambda \mu i} \varphi(\mu) d\mu,$$

la sommation étant étendue aux racines λi de l'équation

$$\pi(\lambda i) = 0.$$

On peut établir que toutes les quantités λ satisfaisant à cette équation sont réelles. En effet, si l'on pose

$$z = \lambda i + l,$$

on a

$$\begin{aligned} \pi(z) = & \cos \frac{\lambda}{2} \left[\frac{h}{2\pi} l \left(e^{\frac{l}{2}} - e^{-\frac{l}{2}} \right) + e^{\frac{l}{2}} + e^{-\frac{l}{2}} \right] - \sin \frac{\lambda}{2} \frac{h}{2\pi} \lambda \left(e^{\frac{l}{2}} + e^{-\frac{l}{2}} \right) \\ & + i \left\{ \cos \frac{\lambda}{2} \frac{h}{2\pi} \lambda \left(e^{\frac{l}{2}} - e^{-\frac{l}{2}} \right) + \sin \frac{\lambda}{2} \left[\frac{h}{2\pi} l \left(e^{\frac{l}{2}} + e^{-\frac{l}{2}} \right) + e^{\frac{l}{2}} - e^{-\frac{l}{2}} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Si donc z doit annuler $\pi(z)$, il faut qu'on ait simultanément

$$\begin{aligned} 1 - \frac{h}{2\pi} \lambda \tan \frac{\lambda}{2} + \frac{h}{2\pi} l \frac{e^{\frac{l}{2}} - e^{-\frac{l}{2}}}{e^{\frac{l}{2}} + e^{-\frac{l}{2}}} &= 0, \\ 1 + \frac{h}{2\pi} \frac{\lambda}{\tan \frac{\lambda}{2}} + \frac{h}{2\pi} l \frac{e^{\frac{l}{2}} + e^{-\frac{l}{2}}}{e^{\frac{l}{2}} - e^{-\frac{l}{2}}} &= 0. \end{aligned}$$

Comme les quantités

$$l \frac{e^{\frac{l}{2}} - e^{-\frac{l}{2}}}{e^{\frac{l}{2}} + e^{-\frac{l}{2}}} \quad \text{et} \quad l \frac{e^{\frac{l}{2}} + e^{-\frac{l}{2}}}{e^{\frac{l}{2}} - e^{-\frac{l}{2}}}$$

sont toutes deux positives, quand l est différent de zéro, il doit en être de même des deux quantités

$$\frac{h}{2\pi} \lambda \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2} \quad \text{et} \quad -\frac{h}{2\pi} \frac{\lambda}{\operatorname{tang} \frac{\lambda}{2}};$$

or, ceci est manifestement impossible puisque leur produit est toujours négatif, et l'on voit que les seules valeurs de z qui pourront annuler $\pi(z)$ seront celles où l'on fera

$$l = 0.$$

Quant à λ , il est déterminé par la relation

$$(23) \quad 1 - \frac{h}{2\pi} \lambda \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2} = 0,$$

dont les racines sont deux à deux égales et de signes contraires.

Revenons maintenant à la formule

$$(22 \text{ bis}) \quad \varphi(\tau) = - \sum \frac{\psi(\lambda i)}{\pi'(\lambda i)} e^{\lambda \tau i} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-\lambda \mu i} \varphi(\mu) d\mu,$$

dans laquelle λ représente une des racines de l'équation (23), et formons les quantités $\psi(\lambda i)$ et $\pi'(\lambda i)$, qui figurent dans ce développement.

On trouvera aisément

$$\psi(\lambda i) = e^{-\frac{\lambda}{2}i} \left(-\frac{h}{2\pi} \lambda i + 1 \right),$$

$$\pi'(\lambda i) = \frac{h}{2\pi} i \frac{2\lambda + \sin \lambda}{\cos \frac{\lambda}{2}};$$

en portant ces valeurs dans le développement (22 bis), on obtient

$$(24) \quad \varphi(\tau) = - \sum \frac{2\pi}{hi} \frac{e^{-\frac{\lambda}{2}i} \left(-\frac{h}{2\pi} \lambda i + 1 \right)}{2\lambda + \sin \lambda} \cos \frac{\lambda}{2} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{\lambda i(\tau-\mu)} \varphi(\mu) d\mu.$$

On peut donner à ce développement une forme plus intéressante en groupant deux à deux, sous le signe Σ , les termes qui correspondent à des valeurs de λ égales et de signes contraires. Il vient ainsi

$$\varphi(\tau) = \sum \frac{2\pi}{h} \frac{\cos \frac{\lambda}{2}}{2\lambda + \sin \lambda} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \left(\frac{2h}{2\pi} \lambda \cos \frac{\lambda}{2} + 2 \sin \frac{\lambda}{2} \right) \cos[\lambda(\tau - \mu)] \varphi(\mu) d\mu,$$

ce qui peut s'écrire, en représentant λ par $2\pi\nu$,

$$(25) \quad \varphi(\tau) = \sum \frac{4\pi\nu}{4\pi\nu + \sin(2\pi\nu)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cos[2\pi\nu(\tau - \mu)] \varphi(\mu) d\mu,$$

expression dans laquelle ν représente l'une des racines de l'équation (15).

Ceci établi, nous pouvons démontrer la légitimité du développement (20) et déterminer les coefficients A et B qui y figurent. En effet, pour que ce développement

$$\sum [A \cos(2\pi\nu\tau) + B \sin(2\pi\nu\tau)]$$

représente la fonction $f(\tau)$, il faut que le développement

$$\sum [-A 2\pi\nu \sin(2\pi\nu\tau) + B 2\pi\nu \cos(2\pi\nu\tau)]$$

représente $f'(\tau)$. Il en sera ainsi, d'après l'égalité (25), si l'on pose

$$A = - \frac{2}{4\pi\nu + \sin(2\pi\nu)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin(2\pi\nu\mu) f'(\mu) d\mu,$$

$$B = \frac{2}{4\pi\nu + \sin(2\pi\nu)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cos(2\pi\nu\mu) f'(\mu) d\mu,$$

Si donc on convient de prendre pour A et B les valeurs ci-dessus, et sous certaines conditions de convergence que nous indiquerons plus loin, on aura

$$\sum_{\nu} [A \cos(2\pi\nu\tau) + B \sin(2\pi\nu\tau)] = f(\tau) + K,$$

K étant une constante.

D'après cela, la solution générale du système d'équations posées au début de ce Chapitre est

$$(26) \quad \begin{cases} V = \sum \frac{2}{4\pi\nu + \sin(2\pi\nu)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi\nu t}{2\sqrt{\lambda\gamma}d} + 2\pi\nu\mu\right) f'(\mu) d\mu \sin \frac{\pi\nu x}{d} - K, \\ I = -\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} \sum \frac{2}{4\pi\nu + \sin(2\pi\nu)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi\nu t}{2\sqrt{\lambda\gamma}d} + 2\pi\nu\mu\right) f'(\mu) d\mu \cos \frac{\pi\nu x}{d}, \end{cases}$$

les sommations étant étendues aux racines positives de l'équation (15).

V. ÉTUDE DE LA CONVERGENCE DES DÉVELOPPEMENTS V ET I ET DES SÉRIES FORMÉES PAR LES DÉRIVÉES DE LEURS TERMES ⁽¹⁾. — Dans tout ce qui précède, nous avons supposé que les développements V et I (ou ω et j) étaient uniformément convergents, ainsi que les séries des dérivées de leurs termes par rapport à t et à x , pour toutes les valeurs de x comprises entre zéro et d et quel que soit t . Or, ceci n'a généralement pas lieu, si l'on forme les termes de ω et j en prenant dans un ordre quelconque les racines ν de l'équation

$$(15) \quad \cot(\pi\nu) - h\nu = 0;$$

mais on peut montrer qu'il suffit, pour satisfaire à toutes les conditions de convergence, de prendre pour $n^{\text{ième}}$ terme des développements ω et j

⁽¹⁾ André LÉAUTÉ, *Comptes rendus*, t. CXLVII, 1908, p. 1394

celui dans lequel figure la $n^{\text{ième}}$ des racines positives, rangées par ordre de grandeur croissante, de l'équation précédente.

Soit donc v_n cette $n^{\text{ième}}$ racine, et, en désignant par ω_n et j_n les $n^{\text{ièmes}}$ termes de ω et de j , écrivons

$$\omega_n = \frac{2}{4\pi v_n + \sin(2\pi v_n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\pi v_n t}{2\sqrt{\lambda\gamma}d} + 2\pi v_n \mu\right) f'(\mu) d\mu \sin \frac{\pi v_n x}{d},$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} j_n = -\frac{2}{4\pi v_n + \sin(2\pi v_n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\pi v_n t}{2\sqrt{\lambda\gamma}d} + 2\pi v_n \mu\right) f'(\mu) d\mu \cos \frac{\pi v_n x}{d};$$

on voit aisément qu'on a

$$\omega_n = -a_n - b_n,$$

$$\sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} j_n = -a_n - b_n,$$

égalités dans lesquelles

$$a_n = \frac{1}{4\pi v_n + \sin(2\pi v_n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin\left[\pi v_n \left(\frac{x}{d} + \frac{t}{2\sqrt{\lambda\gamma}d} + 2\mu\right)\right] f'(\mu) d\mu,$$

$$b_n = -\frac{1}{4\pi v_n + \sin(2\pi v_n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin\left[\pi v_n \left(-\frac{x}{d} + \frac{t}{2\sqrt{\lambda\gamma}d} + 2\mu\right)\right] f'(\mu) d\mu.$$

Pour que, quel que soit t , et lorsque x est compris entre zéro et d , les développements ω et j , ainsi que les séries des dérivées de leurs termes, soient uniformément convergents, il faut et il suffit qu'il en soit de même des séries a_n et b_n . Ceci revient à dire que la série dont le terme général est

$$(27) \quad u_n = \frac{1}{4\pi v_n + \sin(2\pi v_n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin[2\pi v_n(\mu - \tau)] f'(\mu) d\mu$$

et la série dont le terme général est $\frac{du_n}{d\tau}$ sont uniformément convergentes, quel que soit τ ; comme la convergence de la seconde entraîne

celle de la première, nous sommes ramenés à considérer seulement la série

$$(28) \quad u'_n = \frac{4\pi\nu_n}{4\pi\nu_n + \sin(2\pi\nu_n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cos[2\pi\nu_n(\mu - \tau)] f'(\mu) d\mu,$$

dans laquelle on doit supposer que la fonction $f'(\mu)$ satisfait aux conditions de Dirichlet.

Par suite de cette dernière hypothèse, il est permis de développer $f'(\mu)$ en série de Fourier, dont le terme général est

$$(29) \quad v_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \cos[2\pi n(\mu - \tau)] f'(\mu) d\mu;$$

cette série v_n est uniformément convergente quel que soit μ , et il suffit de prouver qu'il en est de même de la série $u'_n - v_n$.

Or, si l'on pose

$$(30) \quad \alpha_n = \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'(\mu) \{ \cos[2\pi\nu_n(\mu - \tau)] - \cos[2\pi n(\mu - \tau)] \} d\mu,$$

$$(31) \quad \beta_n = \frac{\sin(2\pi\nu_n)}{4\pi\nu_n + \sin(2\pi\nu_n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'(\mu) \cos[2\pi\nu_n(\mu - \tau)] d\mu,$$

on voit qu'on a

$$(32) \quad u'_n - v_n = \alpha_n + \beta_n.$$

Pour établir la convergence uniforme de la série $u'_n - v_n$, il est suffisant de montrer que le produit $n^2(u'_n - v_n)$ reste fini quand n croît indéfiniment; or, on a évidemment, d'après l'égalité (32),

$$n^2|u'_n - v_n| \leq n^2|\alpha_n| + n^2|\beta_n|,$$

et l'on est ramené à montrer que les deux produits $n^2|\alpha_n|$ et $n^2|\beta_n|$ ne croissent pas indéfiniment avec n .

Il est permis, pour établir ce dernier point, de supposer que la fonction $f'(\mu)$ garde un signe constant dans l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, on pourrait toujours décomposer l'intervalle $\left(-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}\right)$ en un nombre fini d'intervalles partiels, dans chacun desquels $f'(\mu)$ ne saurait s'annuler; ceci résulte de ce que la fonction $f'(\mu)$ satisfait par hypothèse aux conditions de Dirichlet; on pourrait ensuite répéter pour chacun des intervalles ainsi définis le raisonnement qui suit.

Supposons donc $f'(\mu) \neq 0$, lorsqu'on a

$$-\frac{1}{2} \leq \mu \leq \frac{1}{2}.$$

1° Considérons le produit $n^2 |\alpha_n|$; on a

$$\alpha_n = 2 \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} f'(\mu) \sin[\pi(\nu_n + n)(\mu - \tau)] \sin[\pi(\nu_n - n)(\mu - \tau)] d\mu.$$

Désignons par

$$\mu_1, \quad \mu_2, \quad \mu_3, \quad \dots, \quad \mu_q$$

les zéros de

$$\sin[\pi(\nu_n + n)(\mu - \tau)]$$

compris entre $-\frac{1}{2}$ et $+\frac{1}{2}$, rangés par ordre de grandeur croissante, et posons

$$H = 2 f'(\mu) \sin[\pi(\nu_n + n)(\mu - \tau)] \sin[\pi(\nu_n - n)(\mu - \tau)];$$

on peut écrire

$$(33) \quad |\alpha_n| \leq \left| \int_{-\frac{1}{2}}^{\mu_1} H d\mu \right| + \left| \int_{\mu_1}^{\mu_2} H d\mu \right| + \dots + \left| \int_{\mu_q}^{\frac{1}{2}} H d\mu \right|.$$

Pour trouver une limite supérieure du module des intégrales

$\int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} H d\mu$, remarquons que

$$\int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} H d\mu = \int_{\mu_i}^{\mu_i + \frac{1}{\nu_n + n}} H d\mu + \int_{\mu_i + \frac{1}{\nu_n + n}}^{\mu_{i+1}} H d\mu,$$

et appliquons à chacun des termes du second membre le théorème de la moyenne; il vient ainsi

$$\int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} H d\mu = 2(M - N) \int_{\mu_i}^{\mu_i + \frac{1}{\nu_n + n}} \sin[\pi(\nu_n + n)(\mu - \tau)] d\mu,$$

en désignant par M et N les valeurs moyennes de la quantité

$$f'(\mu) \sin[\pi(\nu_n - n)(\mu - \tau)]$$

dans les intervalles $\left(\mu_i, \mu_i + \frac{1}{\nu_n + n}\right)$ et $\left(\mu_i + \frac{1}{\nu_n + n}, \mu_{i+1}\right)$.

D'autre part,

$$\int_{\mu_i}^{\mu_i + \frac{1}{\nu_n + n}} \sin[\pi(\nu_n + n)(\mu - \tau)] d\mu = \frac{1}{\pi(\nu_n + n)} \left\{ \cos[\pi(\nu_n + n)(\mu - \tau)] \right\}_{\mu_i}^{\mu_i + \frac{1}{\nu_n + n}},$$

et par suite on peut écrire

$$(34) \quad \int_{\mu_i}^{\mu_i + \frac{1}{\nu_n + n}} \sin[\pi(\nu_n + n)(\mu - \tau)] d\mu \leq \frac{2}{\pi(\nu_n + n)}.$$

Quant à la différence M — N, on l'évalue en faisant usage du théorème des accroissements finis; on obtient ainsi, θ étant compris entre 0 et 1,

$$\begin{aligned} M - N = \frac{2}{\nu_n + n} \{ & f''(\mu) \sin[\pi(\nu_n - n)(\mu - \tau)] \\ & + f'(\mu) \pi(\nu_n - n) \cos[\pi(\nu_n - n)(\mu - \tau)] \} \Big|_{\mu = \mu_i + \theta \frac{1}{\nu_n + n}}. \end{aligned}$$

Supposons qu'il existe une quantité A, telle qu'on ait, quel que soit μ ,

$$A \geq |f'(\mu)| \quad \text{et} \quad A \geq |f''(\mu)|;$$

on voit que, lorsque n croîtra indéfiniment, $M - N$ aura pour valeur principale

$$2\pi \frac{(\nu_n - n)}{\nu_n + n} [f''(\mu)(\mu - \tau) + f'(\mu)],$$

et qu'on aura, en désignant par B une quantité indépendante de n ,

$$2|M - N| \leq B \frac{\nu_n - n}{\nu_n + n} \frac{\pi}{2}.$$

En rapprochant ce résultat de celui qui est donné par l'inégalité (34), on a

$$\left| \int_{\mu_i}^{\mu_{i-1}} H d\mu \right| \leq B \frac{\nu_n - n}{(\nu_n + n)^2},$$

et par conséquent

$$\left| \int_{\mu_1}^{\mu_2} H d\mu \right| + \left| \int_{\mu_2}^{\mu_3} H d\mu \right| + \dots + \left| \int_{\mu_{q-1}}^{\mu_q} H d\mu \right| \leq q B \frac{\nu_n - n}{(\nu_n + n)^2} \leq n B \frac{\nu_n - n}{(\nu_n + n)^2}$$

Restent les deux termes extrêmes,

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\mu_1} H d\mu \quad \text{et} \quad \int_{\mu_q}^{\frac{1}{2}} H d\mu;$$

considérons par exemple la première de ces intégrales, et appliquons-lui le théorème de la moyenne; il vient

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\mu_1} H d\mu = 2 \left\{ f'(\mu) \sin[\pi(\nu_n - n)(\mu - \tau)] \right\}^{\mu = -\frac{1}{2} + \theta \frac{1}{\nu_n - n}} \int_{-\frac{1}{2}}^{\mu_1} \sin[\pi(\nu_n + n)(\mu - \tau)] d\mu;$$

si donc on fait croître n indéfiniment, la valeur principale du premier membre est égale à

$$(\nu_n - n) \frac{1}{\nu_n + n} C,$$

C étant une quantité indépendante de n .

En résumé, la valeur principale de $|\alpha_n|$ est inférieure à

$$n \frac{\nu_n - n}{(\nu_n + n)^2} B + \frac{\nu - n}{\nu_n + n} 2C,$$

ou encore, ce qui est équivalent, à

$$\frac{\nu_n - n}{n} K,$$

K étant une quantité indépendante de n .

Pour prouver que le produit $n^2 |\alpha_n|$ ne croît pas indéfiniment avec n , il suffit donc de montrer qu'il en est de même du produit

$$n(\nu_n - n).$$

2° Considérons de même le produit $n^2 |\beta_n|$. On verra, par un calcul analogue au précédent, qu'on a

$$|\beta_n| \leq \frac{1}{4\pi\nu_n + \sin(2\pi\nu_n)} \frac{1}{\nu_n} \left(\frac{nD}{\nu_n} + 2E \right).$$

Il résulte de là que le produit $n^2 |\beta_n|$ ne croîtra pas indéfiniment avec n , si le rapport $\frac{n}{\nu_n}$ reste fini, quand n grandit au delà de toute limite.

En résumé, nous sommes ramenés à établir que, lorsque n croît indéfiniment, le produit $n(\nu_n - n)$ et le rapport $\frac{n}{\nu_n}$ restent finis.

Or, on a

$$\cos(\pi\nu_n) = h\nu_n \sin(\pi\nu_n);$$

quand n croît indéfiniment, le premier membre reste inférieur à l'unité en valeur absolue, tandis que ν_n croît au delà de toute limite; par suite $\sin(\pi\nu_n)$ tend vers zéro, et l'on peut poser

$$\nu_n = n + \varepsilon_n,$$

ε_n étant une quantité qui tend vers zéro quand n croît indéfiniment.

Le rapport $\frac{\nu_n}{n}$ peut donc être mis sous la forme

$$\frac{\nu_n}{n} = 1 + \frac{\varepsilon_n}{n},$$

et l'on voit qu'il a pour limite l'unité quand n croît indéfiniment.

De même, on a

$$\cos(\varepsilon_n \pi) = h(n + \varepsilon_n) \pi \sin(\varepsilon_n \pi);$$

comme ε_n tend vers zéro quand n croît indéfiniment, on déduit de là

$$1 = h \pi \lim(n \varepsilon_n);$$

le produit $n(\nu_n - n)$ ne croît donc pas indéfiniment avec n .

VI. CONCLUSION. — La conclusion qui se dégage de cette étude est que la solution générale des équations posées au début de ce Chapitre est donnée par les formules (26) lorsque, d'une part, les fonctions $f(\mu)$ et $f'(\mu)$ satisfont aux conditions de Dirichlet et que, d'autre part, la fonction $f''(\mu)$ reste finie pour toutes les valeurs de μ comprises entre $-\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

Nous supposerons, dans ce qui va suivre, ces conditions remplies, et nous rechercherons de quelle interprétation physique sont susceptibles les formules que nous venons d'établir.



CHAPITRE IV.

RAPPROCHEMENT DES RÉSULTATS DU CALCUL ET DES FAITS D'EXPÉRIENCE. SUR LES STRIES DES ÉTINCELLES D'INDUCTION.

I. DIFFICULTÉS DU PROBLÈME. — La théorie, dont nous venons de faire l'exposé dans le Chapitre précédent, permet de déterminer quelles sont à un instant donné et en un point quelconque de la bobine l'intensité du courant qui parcourt le fil et la grandeur de la différence de potentiel qui existe entre les deux couches. En s'appuyant sur ce résultat, on doit pouvoir expliquer les différents phénomènes auxquels donne lieu la décharge d'un condensateur à travers une bobine présentant de la capacité.

Mais on se heurte, lorsqu'on s'engage dans cette voie, à de grandes difficultés : les formules auxquelles nous avons été conduits renferment, en effet, plusieurs quantités mal connues, dont la présence est une gêne, lorsqu'on veut passer du domaine de la théorie à celui de la pratique. On voit figurer, en particulier dans les développements de l'intensité I et du potentiel V , la fonction $f'(\mu)$, qu'on ne peut déterminer sans avoir une connaissance exacte des conditions initiales du problème ; or, l'hypothèse de Thomson, qui consiste à supposer pour $t=0$ l'intensité nulle en chaque point du circuit, n'est plus légitime quand la bobine présente de la capacité. La fonction $f'(\mu)$ est donc absolument inconnue.

L'embarras qui en résulte, et qu'amène l'ignorance presque complète où l'on est des conditions initiales, est d'ailleurs fréquent lorsqu'on tente d'interpréter les résultats d'un calcul dont le point de départ a

été la résolution d'équations aux dérivées partielles. Mais la difficulté est accrue ici du fait que les quantités λ et γ , qui figurent dans les expressions trouvées pour I et V, sont elles aussi mal connues et fort difficiles à déterminer expérimentalement.

Néanmoins, on peut tirer des formules obtenues au Chapitre précédent, grâce à la forme spéciale qu'elles affectent et malgré les quantités inconnues qu'elles renferment, un certain nombre de conclusions ayant une signification physique. Nous montrerons, en particulier, qu'il est possible de déduire de ces formules l'explication de la présence des stries dans les étincelles d'induction et qu'on obtient même la loi de l'écartement de ces stries (¹).

II. EXISTENCE DES STRIES PRÉVUE PAR LA THÉORIE. — Nous avons vu que l'intensité I_x en un point de la bobine situé à la distance x de l'extrémité où les deux couches communiquent était représentée par un développement de la forme

$$I_x = -\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4\pi\nu_n + \sin(2\pi\nu_n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin \left[\frac{\pi\nu_n t}{2\sqrt{\lambda\gamma}d} + 2\pi\nu_n\mu \right] f'(\mu) d\mu \cos \left(\frac{\pi\nu_n x}{d} \right),$$

ν_n étant la $n^{\text{ième}}$ des racines positives, rangées par ordre de grandeur croissante, de l'équation (15).

Si l'on fait $x = d$, c'est-à-dire si l'on se place à l'une des deux bornes de la bobine, on aura donc

$$I = -\sqrt{\frac{\gamma}{\lambda}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{4\pi\nu_n + \sin(2\pi\nu_n)} \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} \sin \left[\frac{\pi\nu_n t}{2\sqrt{\lambda\gamma}d} + 2\pi\nu_n\mu \right] f'(\mu) d\mu.$$

Par suite, si l'on dispose en série avec la bobine, entre cette bobine elle-même et l'une des armatures du condensateur, un appareil à courant d'air, analogue à celui qu'a employé M. Hemsalech dans ses

(¹) André LÉAUTÉ, *Comptes rendus*, t. CXLVIII, 1909, p. 339.

expériences, l'étincelle qu'on observera par soufflage sera formée par la superposition de courants sinusoïdaux, correspondant aux termes successifs du développement I. Ces courants élémentaires auront respectivement pour fréquence

$$\frac{\nu_1}{4\sqrt{\lambda\gamma}d}, \quad \frac{\nu_2}{4\sqrt{\lambda\gamma}d}, \quad \dots, \quad \frac{\nu_n}{4\sqrt{\lambda\gamma}d}, \quad \dots;$$

de plus, comme le développement I est convergent quel que soit le temps t , l'amplitude du $n^{\text{ième}}$ terme tendra vers zéro, quand n croîtra indéfiniment. L'oscillation de fréquence $\frac{\nu_1}{4\sqrt{\lambda\gamma}d}$ sera dite *fondamentale*; quant au terme de fréquence $\frac{\nu_2}{4\sqrt{\lambda\gamma}d}$, c'est lui qui donnera naissance aux stries dans l'étincelle.

III. THÉORIE DE THOMSON, DÉDUITE DE LA NOUVELLE THÉORIE. — Il peut être intéressant, au point de vue des relations qui lient la nouvelle théorie à celles qui l'ont précédée, de montrer comment les formules ci-dessus, et en particulier celle qui fait connaître l'intensité I à l'une des bornes de la bobine, se réduisent, lorsque le coefficient γ tend vers zéro, aux formules de la théorie de Thomson.

Remarquons dans ce but qu'annuler γ équivaut à rendre infinie la quantité h , qui figure dans l'équation (15).

Si l'on suppose ν différent de zéro, cette équation se transforme donc en

$$\text{tang}(\pi\nu) = 0$$

et donne pour ν les valeurs

$$\nu = n \quad (n \text{ entier});$$

si, au contraire, on suppose ν infiniment petit, l'équation qui détermine ν prend la forme

$$1 = h\pi\nu^2,$$

dont la solution est

$$\nu = \frac{1}{\sqrt{h\pi}}.$$

Cette relation entre ν et h , lorsqu'on y fait

$$\nu = \frac{1}{\pi} \sqrt{\lambda \gamma} \, d m \quad \text{et} \quad h = \frac{\Gamma}{2 \gamma d} \pi,$$

devient

$$m = \frac{1}{\sqrt{2 \lambda d \Gamma}};$$

si l'on désigne par L la self-induction totale de la bobine, on peut mettre m sous la forme

$$m = \frac{1}{\sqrt{L \Gamma}},$$

résultat identique à celui que fournit la théorie de Thomson.

Il est aisé de vérifier de la même manière que l'amplitude du fondamental se réduit alors à la valeur donnée par Thomson.

Pour achever d'établir la concordance des deux théories dans ce cas particulier de $\gamma = 0$, il reste à montrer que toutes les oscillations supérieures disparaissent, lorsque γ s'annule. Ceci résulte de ce que toutes les racines de l'équation

$$\cot(\pi \nu) - h \nu = 0,$$

à l'exception seulement de celle qui correspond au fondamental, sont de la forme

$$\nu = n \quad (n \text{ entier}),$$

et qu'en remplaçant ν par sa valeur en fonction de m , on transforme cette relation en la suivante :

$$m = n \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{\lambda \gamma} d};$$

lorsque γ devient infiniment petit, m grandit donc au delà de toute limite. Dans les développements obtenus pour I et V, on voit par suite que l'amplitude d'un terme quelconque, hormis le premier, tend vers zéro en même temps que γ .

IV. ÉCARTEMENT DES STRIES. — La principale vérification que nous ferons consistera à déterminer, au moyen des formules auxquelles nous

a conduits la théorie, l'écartement des stries et à comparer les résultats ainsi obtenus à ceux que donne l'expérience.

Pour faciliter cette étude, nous ne prendrons que les stries qui se rapportent au second terme du développement I.

Principe de la vérification. — La période de l'oscillation fondamentale est égale à $\frac{1}{\nu_1} 4\sqrt{\lambda\gamma} d$, tandis que la période qui correspond au second terme est $\frac{1}{\nu_2} 4\sqrt{\lambda\gamma} d$. Comme, dans la pratique, ce second terme a toujours une amplitude inférieure à celle du premier, le nombre de stries comprises dans une oscillation fondamentale est égal à $\frac{1}{2} \frac{\nu_2}{\nu_1}$.

Mais, lorsqu'on cherche la valeur du rapport $\frac{\nu_2}{\nu_1}$, on se trouve en présence d'une des difficultés que nous avons signalées au début de ce Chapitre; les quantités ν_1 et ν_2 sont les deux premières racines de l'équation (15) et, pour calculer le rapport $\frac{\nu_2}{\nu_1}$, il faudrait connaître la valeur de h , c'est-à-dire du coefficient γ . Or, la capacité de la bobine est si faible qu'il est à peu près impossible de déterminer γ avec exactitude, et l'on est dès lors conduit à considérer h comme un paramètre inconnu.

Pour tourner cette difficulté, on procédera de la façon suivante : M. Hemsalech a mesuré l'écartement des stries dans les étincelles qu'on obtient en déchargeant à travers une même bobine des condensateurs de capacités différentes Γ , Γ' , Γ'' et Γ''' . Comme la bobine ne varie pas d'une expérience à l'autre, on a, entre les coefficients h , h' , h'' et h''' qui correspondent aux valeurs Γ , Γ' , Γ'' et Γ''' de la capacité, la relation

$$\frac{h}{\Gamma} = \frac{h'}{\Gamma'} = \frac{h''}{\Gamma''} = \frac{h'''}{\Gamma'''}$$

On tirera h des résultats de la première expérience; on en déduira les quantités h' , h'' et h''' , qui permettront de déterminer les valeurs des rapports $\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)'$, $\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)''$ et $\left(\frac{\nu_2}{\nu_1}\right)'''$. On obtiendra ensuite aisément le nombre

de stries comprises dans chaque oscillation fondamentale pour des valeurs Γ' , Γ'' et Γ''' de la capacité, et l'on comparera les chiffres ainsi obtenus à ceux que fournit directement l'expérience.

Résultats de M. Hemsalech. — Rappelons d'abord les principaux résultats des mesures effectuées par M. Hemsalech. Ces résultats sont réunis dans le Tableau suivant, où les chiffres inscrits dans la première colonne représentent la capacité Γ du condensateur, où les chiffres de la seconde colonne indiquent si c'est dans la première, la seconde, etc. oscillation du fondamental qu'ont été observées les stries, et où enfin les chiffres de la troisième colonne sont les valeurs du rapport $\frac{\lambda}{\delta}$, dans lequel on désigne par λ la longueur de l'oscillation fondamentale et par δ la distance de deux stries consécutives :

0,003 68	1	3,11	0,011 70	1	5,42
»	1	3,12	»	1	4,98
»	1	3,05	»	1	4,77
»	2	8,14	»	1	5,01
»	3	5,90	»	1	5,48
»	1	10,07	»	1	5,34
0,005 85	1	3,91	»	1	5,26
»	1	4,08	»	1	5,08
»	1	4,045	»	1	5,48
0,007 36	1	4,05	»	1	5,22 ⁽²⁾
»	2	4,30 ⁽¹⁾	»	1	5,24
»	3	6,95	»	1	5,29
»	8	7,72	»	1	4,91
»	10	6,58	»	1	5,22
»	10	6,28	»	1	4,82
»	10	8,02	»	4	8,94
»	20	7,95	»	4	8,42
»	20	10,12	»	4	10,17
0,011 70	1	4,77	»	6	10,82

⁽¹⁾ Le chiffre 4,30 est obtenu avec une plaque mauvaise; il est sujet à caution.

⁽²⁾ A partir d'ici, les conditions d'expérience ne sont plus les mêmes : la décharge n'est plus statique et il y a des courants de Foucault; mais, si l'on supprime tous ces chiffres, la moyenne n'est pas changée.

Calcul de h . — Choisissons, pour calculer h , le groupe d'expériences dont les résultats sont le plus concordants, à savoir celui pour lequel on a

$$\Gamma = 0,003\,68,$$

et pour lequel la moyenne des valeurs de $\frac{\lambda}{\delta}$ est ⁽¹⁾

$$m = 3,09.$$

Il faut se garder de poser simplement

$$m = \frac{1}{2} \frac{\gamma_2}{\gamma_1};$$

en effet, si nous formons pour les trois autres groupes d'expériences les moyennes m' , m'' et m''' des valeurs du rapport $\frac{\lambda}{\delta}$, il vient

$$m' = 4,01 \qquad \Gamma' = 0,005\,86$$

$$m'' = 4,17 \text{ }^{(2)} \qquad \Gamma'' = 0,011\,70$$

$$m''' = 5,14 \qquad \Gamma''' = 0,011\,70$$

On doit considérer que, par suite des hypothèses simplificatrices sur lesquelles repose la théorie ⁽³⁾, il existera de petites différences entre les résultats de calcul et ceux de l'expérience. On aura donc

$$2m + \varepsilon = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}, \quad 2m' + \varepsilon' = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)', \quad 2m'' + \varepsilon'' = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)'', \quad 2m''' + \varepsilon''' = \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1}\right)''',$$

et c'est au moyen de la relation

$$2m + \varepsilon = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$$

qu'il faudra déterminer h .

La quantité ε est inconnue; mais, à chaque valeur que l'on donnera

⁽¹⁾ Pour faire les moyennes telles que m , on ne considère que les chiffres du même ordre de grandeur; la présence des autres chiffres sera expliquée ultérieurement.

⁽²⁾ Si l'on fait abstraction du chiffre 4,30 (*voir* note p. 59), on trouve $m'' = 4,05$. Il faut alors prendre une autre valeur pour h .

⁽³⁾ Une autre cause de divergence sera signalée plus loin.

à ε correspondra un groupe de valeurs pour ε' , ε'' et ε''' . On déterminera la valeur de ε qui rend minimum la somme $\varepsilon' + \varepsilon'' + \varepsilon'''$, et, en particulier, dans le cas qui nous occupe, on trouvera ainsi qu'il convient de faire

$$\varepsilon = 0,13;$$

par suite

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 2 \times 3,09 + 0,13 = 6,31.$$

La valeur de $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ étant connue, on en déduit h . En effet, on a

$$\cot(\pi\nu_1) - h\nu_1 = 0,$$

$$\cot(\pi\nu_2) - h\nu_2 = 0.$$

Posons

$$\alpha_1 = \text{angle (en grades) correspondant à l'arc } \pi\nu_1,$$

$$\alpha_2 = \text{angle (en grades) correspondant à l'arc } \pi\nu_2;$$

il en résulte que

$$\cot(\alpha_1) - \alpha_1 = \cot(\alpha_2) - \alpha_2,$$

$$\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 6,31.$$

Ces deux équations permettent de déterminer α_1 et α_2 , à savoir

$$\alpha_1 = 32^{\text{G}}, 58,$$

$$\alpha_2 = 205^{\text{G}}, 65.$$

On déduit de là

$$h = 10,92.$$

Détermination de h' , h'' et h''' . — Connaissant h , on calcule h' , h'' et h''' au moyen de la relation

$$\frac{h}{\Gamma} = \frac{h'}{\Gamma'} = \frac{h''}{\Gamma''} = \frac{h'''}{\Gamma'''},$$

On a donc

$$h' = 10,92 \frac{\Gamma'}{\Gamma},$$

$$h'' = 10,92 \frac{\Gamma''}{\Gamma},$$

$$h''' = 10,92 \frac{\Gamma'''}{\Gamma}.$$

Le rapport $\frac{\Gamma'}{\Gamma}$ est égal à 2, car le condensateur Γ' est formé de deux condensateurs identiques à Γ , montés en parallèle; pour la même raison, le rapport $\frac{\Gamma'''}{\Gamma''}$ est égal à 2.

Quant au rapport $\frac{\Gamma''}{\Gamma}$, il est égal au rapport des surfaces des deux condensateurs Γ'' et Γ ; en effet, les plaques de verre qui forment le diélectrique de ces deux condensateurs sont faites du même verre et ont même épaisseur. On trouve ainsi

$$\frac{\Gamma''}{\Gamma} = \frac{585}{368}.$$

En définitive, sans que dans ce calcul interviennent les valeurs absolues de Γ , Γ' , Γ'' et Γ''' , lesquelles sont mal connues, on obtient

$$h' = 21,84,$$

$$h'' = 17,35,$$

$$h''' = 34,70.$$

Détermination de l'écartement des stries. — Portons maintenant chacune des trois valeurs de h ainsi obtenues dans les deux équations

$$L \cot \alpha_1 + \cot \alpha_1 + L_{200} = Lh,$$

$$L \cot \alpha_2 + \cot \alpha_2 + L_{200} = Lh,$$

et tirons-en les trois valeurs correspondantes du rapport $\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$, c'est-à-dire du rapport $\frac{\nu_1}{\nu_2}$.

Premier cas.

$$h' = 21,84.$$

On obtient

$$\alpha_1 = 23^6,58 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 202^6,875.$$

Par suite,

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 8,603.$$

Nombre de stries prévu par le calcul : 4,30.

Deuxième cas.

$$h'' = 17,35.$$

On obtient

$$\alpha_1 = 26^6,30 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 203^6,60.$$

Par suite,

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 7,735.$$

Nombre de stries prévu par le calcul : 3,867.

Troisième cas.

$$h''' = 34,70.$$

On obtient

$$\alpha_1 = 18^6,87 \quad \text{et} \quad \alpha_2 = 201^6,82.$$

Par suite,

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = 10,701.$$

Nombre de stries prévu par le calcul : 5,35.

V. CONCORDANCE DE LA NOUVELLE THÉORIE AVEC LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DE M. HEMSALECH. — En résumé, nous obtenons pour les

nombre de stries prévus par le calcul dans les divers cas :

$$3,09, \quad 4,30, \quad 3,867, \quad 5,35,$$

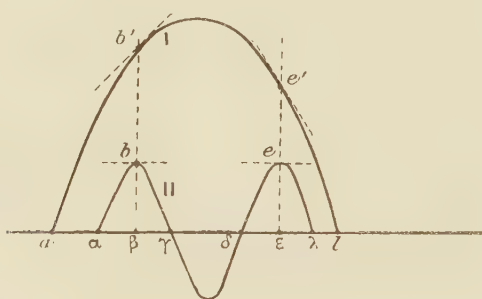
tandis que les nombres de stries obtenus par M. Hemsalech dans ses expériences s'écartent respectivement de ceux qui précèdent d'environ 2 pour 100, 3 pour 100, 3,5 pour 100, 4 pour 100.

Ces divergences sont de l'ordre des erreurs d'expérience.

Les chiffres trouvés par M. Hemsalech sont généralement très voisins de nombres entiers. M. Hemsalech s'est cru autorisé à penser que cette coïncidence approximative n'était pas fortuite et qu'il fallait y voir une loi physique; mais, pour établir qu'il en est ainsi, il faudrait effectuer de nouvelles et plus nombreuses expériences.

Les différences, que nous venons de constater entre chiffres mesurés et chiffres calculés, sont faibles, et l'on peut considérer qu'il y a une concordance satisfaisante entre la théorie et l'expérience; mais cette conclusion prend encore plus de force, si l'on remarque que ces différences sont dues en partie à ce que les stries ont sur les maxima du second terme un peu de retard ou d'avance, suivant que le fondamental est, au moment où elles se produisent, croissant ou décroissant. Pour se rendre compte de ce fait, il suffit de considérer la figure 23, où l'on

Fig. 23.



a porté les valeurs du temps en abscisses et où la courbe I figure la variation du terme

$$A_1 \sin\left(\frac{\pi \nu_1}{2 \sqrt{\lambda \gamma} d} t\right) + B_1 \cos\left(\frac{\pi \nu_1}{2 \sqrt{\lambda \gamma} d} t\right),$$

tandis que la courbe II a pour ordonnées

$$A_2 \sin\left(\frac{\pi\nu_2}{2\sqrt{\lambda\gamma}d}t\right) + B_2 \cos\left(\frac{\pi\nu_2}{2\sqrt{\lambda\gamma}d}t\right).$$

On voit que la première strie se produira, non pour $t = a\beta$, mais pour une valeur de t légèrement supérieure, tandis que la strie suivante correspondra au contraire à une valeur de t un peu inférieure à $a\varepsilon$.

Cette remarque est de nature à diminuer encore l'importance relative des faibles divergences qui se produisent entre les chiffres fournis par le calcul et les résultats de l'expérience.

VI. TERMES DE RANG SUPÉRIEUR ET STRIES D'ORDRE SUPÉRIEUR. — Nous n'avons considéré jusqu'ici que les deux premiers termes du développement I; les stries dues aux termes suivants n'ont pas pu être décelées. Ces termes, en effet, du moins à partir du quatrième, ont une trop grande fréquence pour produire des stries perceptibles. Quant au troisième terme, il a une fréquence à peu près double de la fréquence du second terme; si son amplitude se trouvait renforcée par un phénomène de résonance de façon à égaler l'amplitude du fondamental, il pourrait en résulter des stries, qui, bien que très serrées, seraient encore visibles; mais ce phénomène exceptionnel ne s'est pas présenté au cours des expériences que nous avons effectuées.

VII. VARIATION DU NOMBRE DES STRIES SUIVANT LES OSCILLATIONS. — Dans tout ce qui précède, l'influence de la résistance ohmique de la bobine et l'amortissement qui en résulte ont été négligés. On peut imaginer que cet amortissement soit tel qu'au bout d'un certain temps la différence entre l'amplitude du fondamental et celle du second terme devienne très petite; dans ces conditions, le nombre des stries devra passer du simple au double.

Une variation de cet ordre a été constatée par M. Hemsalech, ainsi

que le montre l'exemple suivant :

Capacité : $\Gamma''' = 0,00736$.

Numéros d'ordre de l'oscillation du fondamental.	Valeur mesurée du rapport $\frac{\nu_2}{\nu_1}$.
1.....	4,05
2.....	4,30
3.....	6,95
8.....	7,72
10.....	{ 6,58
	{ 8,02
20.....	{ 7,95
	{ 10,12

Le même fait peut être observé dans les autres cas, ainsi qu'on le constatera sur le Tableau de la page 59; dès que, par suite de la résistance de la bobine, les amplitudes des deux premiers termes deviennent voisines, le rapport $\frac{\nu_2}{\nu_1}$ augmente subitement et passe du simple au double environ. Les remarques que nous avons faites plus haut, relativement aux irrégularités qui se produisent dans l'écartement des stries, s'appliquent ici comme précédemment, et elles expliquent pourquoi la première valeur n'est pas exactement la moitié de la seconde.

VIII. FRÉQUENCE DU FONDAMENTAL. COMPARAISON AVEC LA FORMULE DE THOMSON. — Nous avons vu que le fondamental engendre, lorsque la capacité de la bobine tend vers zéro, l'oscillation unique que prévoit la théorie de Thomson. Comme le coefficient γ est, dans tous les cas, petit, la fréquence f du fondamental doit différer peu de

$$f_1 = \frac{1}{2\pi\sqrt{\Gamma L}};$$

il est intéressant de rechercher l'ordre de grandeur de la différence $f - f_1$.

Or, on a

$$f = \frac{\nu_1}{4\sqrt{k\gamma}d} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L\Gamma}} \nu_1\sqrt{h\pi};$$

le rapport $\frac{f_1}{f}$ est donc égal à

$$\frac{1}{\nu_1\sqrt{h\pi}}.$$

Examinons successivement les quatre cas étudiés plus haut :

1° $\Gamma = 0,00368.$

On a trouvé

$$h = 10,92,$$

$$\nu_1 = \frac{32,58}{200},$$

d'où

$$\frac{f_1}{f} = 1,048.$$

2° $\Gamma' = 0,00585.$

On a trouvé

$$h' = 21,84,$$

$$\nu_1 = \frac{23,58}{200},$$

d'où

$$\frac{f_1}{f} = 1,024.$$

3° $\Gamma'' = 0,01170.$

On a trouvé

$$h'' = 34,70,$$

$$\nu_1 = \frac{18,87}{200}.$$

Par suite,

$$\frac{f_1}{f} = 1,015.$$

4° $\Gamma''' = 0,00736.$

On a trouvé

$$H''' = 17,35,$$

$$v_1 = \frac{26,30}{200}.$$

Par suite,

$$\frac{f_1}{f} = 1,030.$$

On voit que dans ces quatre cas la différence $f - f_1$ est extrêmement petite.

Il ne sera donc utile d'avoir recours à la théorie précédemment exposée que pour étudier des phénomènes dans lesquels interviendront les stries.

IX. CONCLUSION. — Les principales conséquences physiques de la théorie mathématique, que nous avons exposée au Chapitre III et dont nous venons d'interpréter les résultats, s'énoncent comme il suit :

Lorsqu'on décharge un condensateur à travers une bobine portant deux couches de fil, le courant qui parcourt la bobine peut être considéré comme dû à la superposition de deux courants sinusoïdaux ; la fréquence du premier est égale sensiblement à celle que prévoit la théorie de Thomson ; le second a une fréquence plus grande, et son existence fournit une explication de tous les faits observés au sujet des stries dans les étincelles d'induction.

RÉSUMÉ GÉNÉRAL.

I. Pour étudier le courant de décharge d'un condensateur à travers une self-induction, M. Hemsalech a examiné, en la photographiant sur une pellicule mobile ou en la soufflant au moyen d'un courant d'air, l'étincelle produite par une coupure intercalée dans le circuit; il a ainsi vu apparaître dans chaque oscillation d'une même étincelle un certain nombre de stries également éloignées l'une de l'autre.

MM. Battelli et Magri ont contesté que ces stries fussent équidistantes, et ils les ont attribuées à des expulsions irrégulières de vapeur métallique provenant des électrodes.

Nous nous sommes proposé de rechercher quelle était la véritable cause de ces stries.

II. Nous avons montré expérimentalement que la cause essentielle des stries est la capacité que possède la bobine de self-induction intercalée dans le circuit de décharge; dans cette bobine deux couches de fil superposées forment les armatures d'un condensateur, dont le diélectrique est représenté par l'isolant qui entoure le fil. Cette capacité est d'autant plus forte que la bobine employée porte moins de couches; elle est maximum si le nombre des couches se réduit à deux.

Nous avons constaté que les stries sont d'autant plus nettes que la capacité de la bobine est plus forte, et que ces stries disparaissent lorsque la capacité de la bobine diminue au delà d'une certaine limite.

III. Il résulte de ces expériences que la théorie de Thomson, relative à la décharge des condensateurs, n'est plus applicable dès qu'on intercale une bobine à plusieurs couches de fil dans le circuit de décharge; cette théorie, en effet, suppose nulle la capacité du circuit qui réunit les deux armatures.

IV. Nous avons établi la théorie mathématique de la décharge d'un condensateur à travers une bobine portant deux couches de fil.

V. Nous avons montré que cette théorie explique l'existence des stries dans les étincelles de self-induction, et qu'elle permet même de calculer l'écartement de ces stries. Sur ce dernier point, les chiffres auxquels elle conduit ont été comparés à ceux qu'a obtenus M. Hem-salech ; l'écart entre les résultats du calcul et les résultats d'expérience est dans tous les cas inférieur à 4 pour 100.

VI. Enfin, la théorie de W. Thomson peut être déduite de la nouvelle théorie, dont elle n'est qu'un cas particulier.

Vu et approuvé :

Paris, le 19 janvier 1910.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 19 janvier 1910.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE I.

HISTORIQUE.

CHAPITRE II.

PARTIE EXPÉRIMENTALE.

DE LA CAPACITÉ DANS LES BOBINES DE SELF-INDUCTION.

	Pages.
I. Méthodes d'observation.....	13
Dispositif expérimental.....	13
Appareils.....	14
Bobines.....	15
II. Première série d'expériences : Décharge à travers deux branches en parallèle.....	16
Théorie.....	18
Vérifications expérimentales de la théorie.....	20
<i>Premier cas.</i> — Capacités différentes, selfs égales.....	21
<i>Deuxième cas.</i> — Capacités différentes, selfs inégales.....	22
<i>Troisième cas.</i> — Capacités très différentes, selfs peu différentes.....	23
<i>Quatrième cas.</i> — Capacités très différentes, selfs égales.....	24
<i>Cinquième cas.</i> — Rapport de capacités infini.....	25
<i>Sixième cas.</i> — Rapport de capacités nul.....	25
III. Deuxième série d'expériences : Décharge à travers une bobine à plusieurs couches.....	25
Remarques sur la capacité d'une bobine de self.....	26
<i>Première expérience.</i> — Capacité formée par une plaque de condensateur.....	27
<i>Deuxième expérience.</i> — Capacité formée par deux couches d'une bobine.....	28
<i>Troisième expérience.</i> — Influence de la capacité d'une couche de la bobine par rapport à l'autre.....	29
<i>Quatrième expérience.</i> — Influence de la différence du potentiel des deux couches sur la production des stries.....	30
<i>Cinquième expérience.</i> — Dédoublement des stries.....	30

	Pages.
IV. Conclusion.....	30

CHAPITRE III.

PARTIE THÉORIQUE.

ÉTUDE MATHÉMATIQUE DE LA DÉCHARGE D'UN CONDENSATEUR A TRAVERS UNE BOBINE
AYANT DE LA CAPACITÉ.

I. Exposé de la question. Hypothèses faites.....	32
II. Mise en équation.....	33
Conditions aux limites.....	35
Conditions initiales.....	35
III. Résolution des équations.....	36
IV. Étude de la généralité de la solution trouvée.....	38
V. Étude de la convergence des développements V et I et des séries formées par les dérivées de leurs termes.....	46
VI. Conclusion.....	53

CHAPITRE IV.

RAPPROCHEMENT DES RÉSULTATS DE CALCUL ET DES FAITS D'EXPÉRIENCE.
DES STRIES DANS LES ÉTINCELLES D'INDUCTION.

I. Difficultés du problème.....	54
II. Existence des stries prévue par la théorie.....	55
III. Théorie de Thomson déduite de la nouvelle théorie.....	56
IV. Écartement des stries.....	57
V. Concordance de la nouvelle théorie avec les résultats expérimentaux de M. Hemsalech.....	63
VI. Termes de rang supérieur et stries d'ordre supérieur.....	65
VII. Variation du nombre de stries suivant les oscillations.....	65
VIII. Fréquence du fondamental. Comparaison avec la formule de Thomson.....	66
IX. Conclusion.....	68
RÉSUMÉ GÉNÉRAL.....	69

SECONDE THÈSE.

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Étude chimique du caoutchouc.

Vu et approuvé :

Paris, le 19 janvier 1910.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

PAUL APPELL.

Vu et permis d'imprimer :

Paris, le 19 janvier 1910.

LE VICE-RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

L. LIARD.

PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS,
44786 Quai des Grands-Augustins, 55
